

البكالوريا بين يديك

محمد صابور

BAC

دراسة الدوال

الدوال : الناطقة - الجذرية - المثلثية
الأسية واللوغاريتمية

مسألة نموذجية 100

Scanned by:

Mekkaoui Ayoub

البرنامج الجديد

دار المفيد
للنشر والتوزيع

Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr



دراسة الدوال

الدوال : الناطقة - الجذرية - المثلثية
الأسية - اللوغاريتمية

100 مسألة نموذجية بكالوريا

(البرنامج الجديد)

الشعب : - علوم تجريبية
- رياضيات
- تقني رياضي

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

رقم الإيداع القانوني: 4304 - 2007

ردمك : 7 - 1946 - 0 - 9947 - 987

Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

24/04/2015

دار المفيد للنشر والتوزيع – عين مليلة
الهاتف : 032-45-10-11

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين
سيد البشرية محمد صلى الله عليه وسلم .

أخي القارئ ، أضع بين يديك عنوانا جديدا "دراسة الدوال"
يضاف إلى قائمة "مسألة البكالوريا بين يديك"

إن هذا الكتاب يحتوي 100 مسألة نموذجية بكالوريا
إن كثرة المسائل المحلولة الذي يحتويها هذا الكتاب ستساعد
التلميذ على تجاوز كل الصعوبات التي يتلقاها في دراسة الدوال.
إن الملخص والتوجيهات القيمة التي يحتويها هذا الكتاب تدعم
التلميذ وتعطيه القدرات للإجابة على الأسئلة الخاصة بدراسة الدوال.
وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق في امتحان
البكالوريا "إن شاء الله" ، كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات
أن يمدوني بملاحظاتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتاب .
كما أشكر شكرا جزيلا كل من قدم لي يد المساعدة في إنجاز هذا
الكتاب.

الأستاذ : محمد صابور

الإهداء

-إلى والدي الكريمين

- إلى رجال التعليم المخلصين في واجبهم

- إلى أبنائي الطلبة متمنيا لهم النجاح

" في امتحان البكالوريا "

Scanned by: Mekkaoui Ayoub

Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

بالتوفيق إن شاء الله في البكالوريا

الدوال العددية

مجموعة التعريف

مجموعة قيم المتغير الحقيقي x من أجلها نستطيع حساب $f(x)$ تسمى مجموعة التعريف الدالة f .

الاستمرار

• الاستمرار عند النقطة x_0 .

تكون الدالة f مستمرة عند النقطة x_0 إذا كانت معرفة عند x_0 وفي جواره
و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

إذا كانت الدالة f مستمرة على يمين وعلى يسار x_0 فهي مستمرة عند x_0 .

• الاستمرار على مجال

تكون الدالة f مستمرة على المجال $]a; b[$ إذا كانت مستمرة عند كل نقطة x_0 من هذا المجال. إذا كانت f و g دالتين مستمرتين على المجال D فإن:

$$(f + g), (f \times g), \left(\frac{f}{g} \right)$$

هي أيضا دوال مستمرة على D

نقبل أن : - الدوال كثيرات الحدود مستمرة على \mathbb{R}
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري الحدود) هي مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .

الاشتقاق

• المشتق عند النقطة x_0

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح يشمل x_0 .

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$ نقول بأن الدالة f تقبل الاشتقاق عند النقطة x_0

ويسمى العدد l (يرمز له بالعدد $(f'(x_0))$ العدد المشتق

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{يمكن أيضا أن نعرف } f'(x_0) = f'(x_0)$$

• التفسير الهندسي للعدد المشتق
العدد المشتق $f'(x_0)$ هو معامل التوجيه للمماس للمنحنى (c) للدالة f عند x_0

• المشتق على يمين وعلى يسار x_0

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$ فالعدد λ يسمى مشتق الدالة f على يمين x_0

- إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \beta$ فالعدد β يسمى مشتق الدالة f على يسار x_0

تكون الدالة f قابلة الاشتقاق عند x_0 إذا كانت قابلة الاشتقاق على يمين وعلى يسار x_0 والمشتق على اليمين يساوي المشتق على اليسار أي $\lambda = \beta$.

• مشتق دالة على مجال

تكون الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]a; b[$ إذا كانت قابلة الاشتقاق من أجل كل قيمة x_0 تنتمي إلى المجال $]a; b[$

إذا كانت الدالتين f و g قابلتين الاشتقاق على المجال D فإن:

$(f + g)$ ، $(f \times g)$ ، $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي أيضا دوال قابلة الاشتقاق على D وتكون:

$$(f + g)' = f' + g' \quad -$$

$$(\lambda \times f)' = \lambda \times f' \quad - \text{ حيث } \lambda \text{ هو عدد حقيقي}$$

$$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f \quad -$$

• مشتق بعض الدوال

$$\lambda \in \mathbb{R} , (\lambda)' = 0 \quad -$$

$$(x^n)' = n \times x^{n-1} \quad -$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad -$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad -$$

$$\sin(ax + b)' = a \times \cos(ax + b) \quad -$$

$$\cos(ax+b)' = -a \times \sin(ax+b) \quad -$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad -$$

$$\left([f(x)]^n\right)' = n \times [f(x)]^{n-1} \times f'(x) \quad -$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad -$$

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad -$$

$$(e^x)' = e^x \quad -$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad -$$

$$(a^x)' = \ln a \times a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+) \quad -$$

دراسة تغيرات دالة

f دالة عددية معرفة على المجال D

- إذا كان $f'(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in D$ فإن f متزايدة على المجال D

- إذا كان $f'(x) \leq 0$ من أجل كل $x \in D$ فإن f متناقصة على المجال D

- إذا كان $f'(x) = 0$ من أجل كل $x \in D$ فإن f ثابتة على المجال D .

نظرية القيم المتوسطة

إذا كانت الدالة f مستمرة ورتبية تماما على المجال $[a; b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k

محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد في المجال $[a; b]$

نقاط التقاطع للمنحني مع المحاورين

(1) إذا كانت للمعادلة $f(x) = 0$ فإن المنحني (c) للدالة f يقطع محور الفواصل وجذور

هذه المعادلة تمثل فواصل هذه النقاط. (2) إذ كانت الدالة f معرفة من أجل $x = 0$ فإن

منحني الدالة f يقطع محور الترتيب في النقطة $(0, f(0))$

مركز تناظر منحنى

(1) إذا كانت الدالة f فردية فالمنحنى (c) للدالة f يقبل مركز تناظر النقطة $(0; 0)$

(2) إذا كان $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ فالنقطة $\omega(\alpha; \beta)$ هي مركز تناظر للمنحنى (c) للدالة f

محور تناظر منحنى

(1) إذا كانت f دالة زوجية أي $f(-x) = f(x)$ فمنحنى الدالة f يقبل في معلم متعامد و متجانس محور الترتيب "محور تناظر له"

(2) إذا كان $f(x - 2\alpha) = f(x)$ فالمستقيم ذوا لمعادلة $x = \alpha$ هو محور تناظر للمنحنى (c) للدالة f في معلم متعامد و متجانس

النهاية الصغرى والنهاية العظمى لمنحنى

f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح يشمل x_0 ، $f'(x)$ مشتقها.

إذا كان $f'(x_0) = 0$ والمشتق $f'(x)$ يغير إشارته بمرور على x_0 .

فالنقطة $(x_0; f(x_0))$ هي نهاية صغرى أو نهاية عظمى لمنحنى الدالة f

نقطة انعطاف لمنحنى

f دالة عددية معرفة عند x_0 ، إذا كان $f''(x)$ ينعدم عند x_0 مغيرا إشارته بمرور على x_0 .

فتكون النقطة $(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f

النقطة الزاوية لمنحنى

f دالة عددية معرفة عند x_0 وقابلة الاشتقاق على يمين وعلى يسار x_0 ، إذا كان العدد

المشتق $f'(x_0)$ على يمين ويسار x_0 غير متساويان، في هذه الحالة منحنى الدالة f

له عند x_0 نصفي مماسين (النقطة x_0 هي نقطة زاوية)

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة x_0

f دالة عددية معرفة عند x_0 ، (c) منحنىها البياني.

معادلة المماس للمنحنى (c) عند النقطة التي فاصلتها x_0 هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

الفروع اللانهائية للمنحني

عندما $|x| \rightarrow +\infty$ أو $|y| \rightarrow +\infty$ نقول بأن المنحني (c) للدالة f له فرعاً لانهاياً
(1) - إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ ، نقول بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $x = a$ هو مستقيم
مقارب لمنحني الدالة f

(2) - إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = b$ نقول بأن المستقيم ذو المعادلة $y = b$ هو مستقيم

لمنحني الدالة f في جوار $(+\infty)$ وفي جوار $(-\infty)$

(3) - إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$

مستقيم مقارب لمنحني الدالة f في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ملاحظات

(1) - إذا كان $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$ ، احتمال وجود مستقيم مقارب مائل للدالة f

(2) - المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = a$ لا يقطع أبداً منحني الدالة f

(3) - المستقيم المقارب المائل (الأفقي) يمكن أن يقطع منحني الدالة f .

وضعية منحني بالنسبة لمستقيم مقارب مائل

- إذا كانت للمعادلة $f(x) = ax + b$ حلول، منحني الدالة f يقطع المستقيم

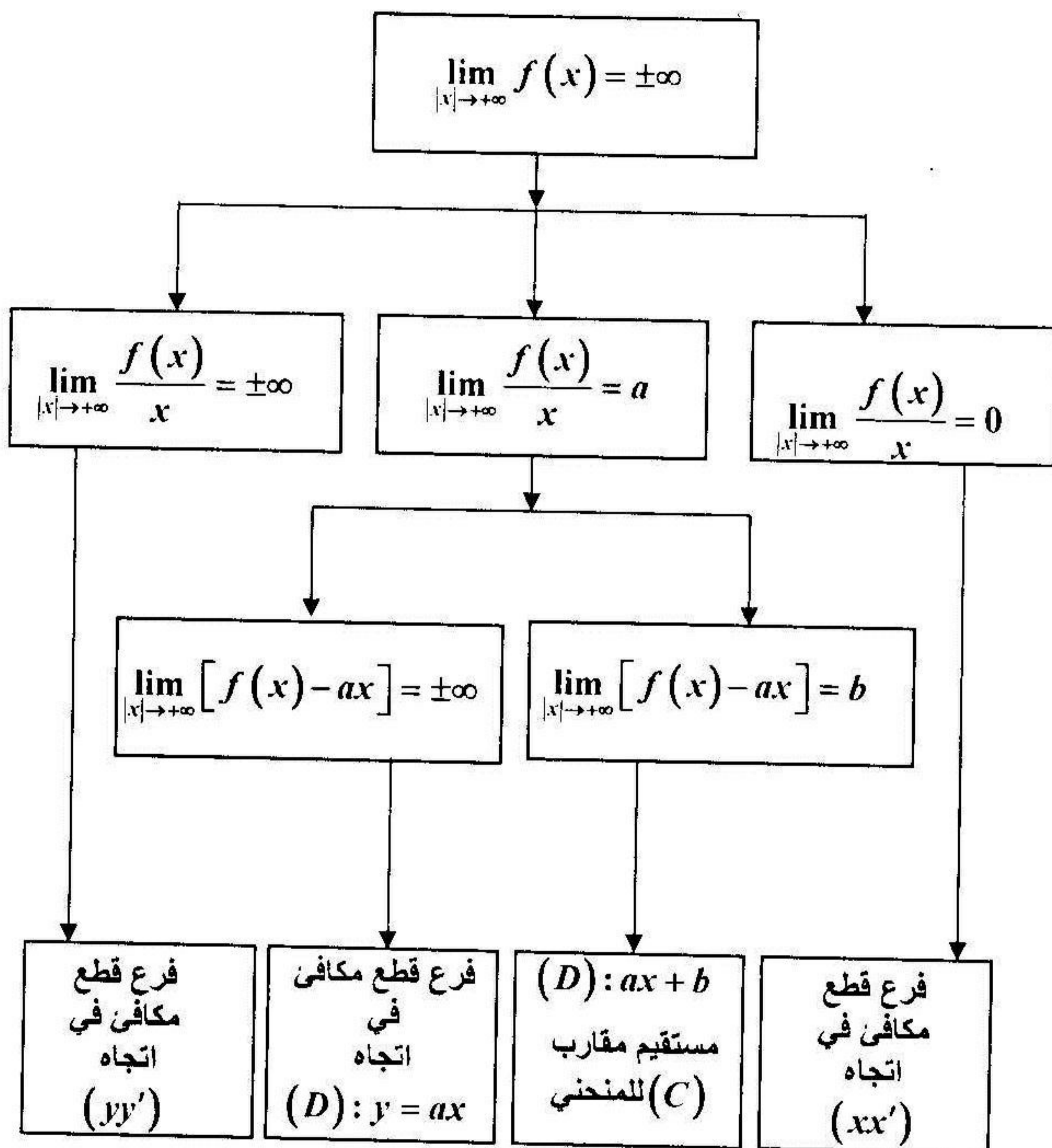
- المقارب (D) ذو المعادلة $y = ax + b$

- في المجال الذي يكون فيه $f(x) - (ax + b) < 0$ ، يكون منحني الدالة f تحت

المستقيم المقارب (D)

- في المجال الذي يكون فيه $f(x) - (ax + b) > 0$ ، فيكون منحني الدالة f فوق

المستقيم المقارب (D)



الدوال الأصلية

كل دالة مستمرة على مجال فهي تقبل دوال أصلية على هذا المجال.

يرمز لمجموعة الدوال الأصلية للدالة f بـ: $\int f(x) dx$

إذا كان g هي دالة أصلية للدالة f فإن: $f(x) = g'(x)$ ونكتب:

$$\int f(x) dx = g(x) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

• دوال أصلية لبعض الدوال

$$\int \lambda dx = \lambda x + c \quad -$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{Q} - \{-1\}) \quad -$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad -$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad -$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + c \quad -$$

$$\int \sin(\alpha x + \beta) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x + \beta) + c \quad -$$

$$\int \cos(\alpha x + b) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x + b) + c \quad -$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad -$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c \quad -$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad -$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c \quad -$$

$$\int [f(x)]^n \times f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{✓}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \quad -$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c \quad -$$

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = -\frac{1}{f(x)} + c \quad -$$

التكامل بالتجزئة

$$\int f'(x) \times g(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f(x) \times g'(x) dx \quad -$$

$$\int f(x) \times g'(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) \times g(x) dx \quad -$$

التكامل المحدود

f دالة مستمرة على المجال D و g دالة أصلية لها، a و b قيمتين من هذا المجال. نسمي التكامل المحدود من a إلى b للدالة f العدد الحقيقي $g(b) - g(a)$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x) dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

• خواص التكامل المحدود

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad , \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

إذا كانت f الدالة مستمرة على مجال يشمل القيم a, b, c فإن:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda \times f(x) dx = \lambda \times \int_a^b f(x) dx$$

إذا كان من أجل $x \in [a; b]$ فإن $f(x) \geq 0$: فإن $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

إذا كان $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[a; b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

حساب مساحة حيز المستوى

- المساحة المحصورة بين المحني (c) ومحور الفواصل والسقيمين اللذين

معادلتاهما $x = a$ و $x = b$

$$s = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{لما يكون } (c) \text{ فوق محور الفواصل على المجال } [a; b])$$

$$s = - \int_a^b f(x) dx \quad (\text{لما يكون } (c) \text{ تحت محور الفواصل على المجال } [a; b])$$

- المساحة المحصورة بين منحنيين (c) و (c') للدالتين f و g والمستقيمين

$x = a$ و $x = b$

$$s = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{لما يكون } (c) \text{ فوق } (c') \text{ على المجال } [a; b])$$

$$s = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \quad (\text{لما يكون } (c) \text{ تحت } (c') \text{ على المجال } [a; b])$$

ملاحظة : في جميع الحالات نضرب العدد s في وحدة المساحة التي

تساوي $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$



الدوال الناطقة

• الدوال من الشكل: $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$

لدراسة هذا النوع من الدوال يستحسن كتابتها على الشكل:

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{a'x + b'}. \quad \mathbb{R} - \left\{ \frac{-b'}{a'} \right\}$$

منحني هذه الدوال يقبل دائما مستقيم مقارب مائل معادلته $y = \alpha x + \beta$ ومستقيم مقارب

عمودي معادلته $x = \frac{-b'}{a'}$. نقطة التقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر المنحني

• الدوال من الشكل: $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$

إذا كانت المعادلة $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ليست لها حلول فتكون هذه الدوال معرفة على \mathbb{R}

إذا كانت المعادلة $a'x^2 + b'x + c' = 0$ تقبل جذرين $x = x_1$ و $x = x_2$ تكون هذه الدوال

معرفة على $\mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$

منحني هذه الدوال يقبل دائما مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = \frac{a}{a'}$ ($a' \neq 0$) ويقطع المنحني

هذا المستقيم المقارب في نقطة وحيدة إذا كانت للمعادلة $f(x) = \frac{a}{a'}$ حل.

منحني هذه الدوال له مستقيم مقارب $x = \frac{-b'}{2a'}$ أو مستقيمين مقاربين $x = x_1$ و $x = x_2$

حسب المعادلة $a'x^2 + b'x + c' = 0$ إن كانت لها جذرا مضاعف أو جذرين

• الدوال من الشكل: $x \rightarrow \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a'x^2 + b'x + c'}$

عبارة هذه الدوال تكتب على الشكل: $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x + \delta}{a'x^2 + b'x + c'}$

منحني هذا النوع من الدوال يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = \alpha x + \beta$ ويقبل مستقيم

مقارب أو مستقيمين مقاربين عموديين وهذا إن كانت للمعادلة $a'x^2 + b'x + c' = 0$ جذرا مضاعف أو جذرين.

أمثلة على دراسة الدوال الناطقة

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+3} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{-2x^2+3x+2}{2x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = 2x+3 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2} \quad (5)$$

الحل

$$f(x) = \frac{2x^2+8x+2}{x^2+2x+1} \quad (1)$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$|x| \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -1$$

$$f'(x) = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

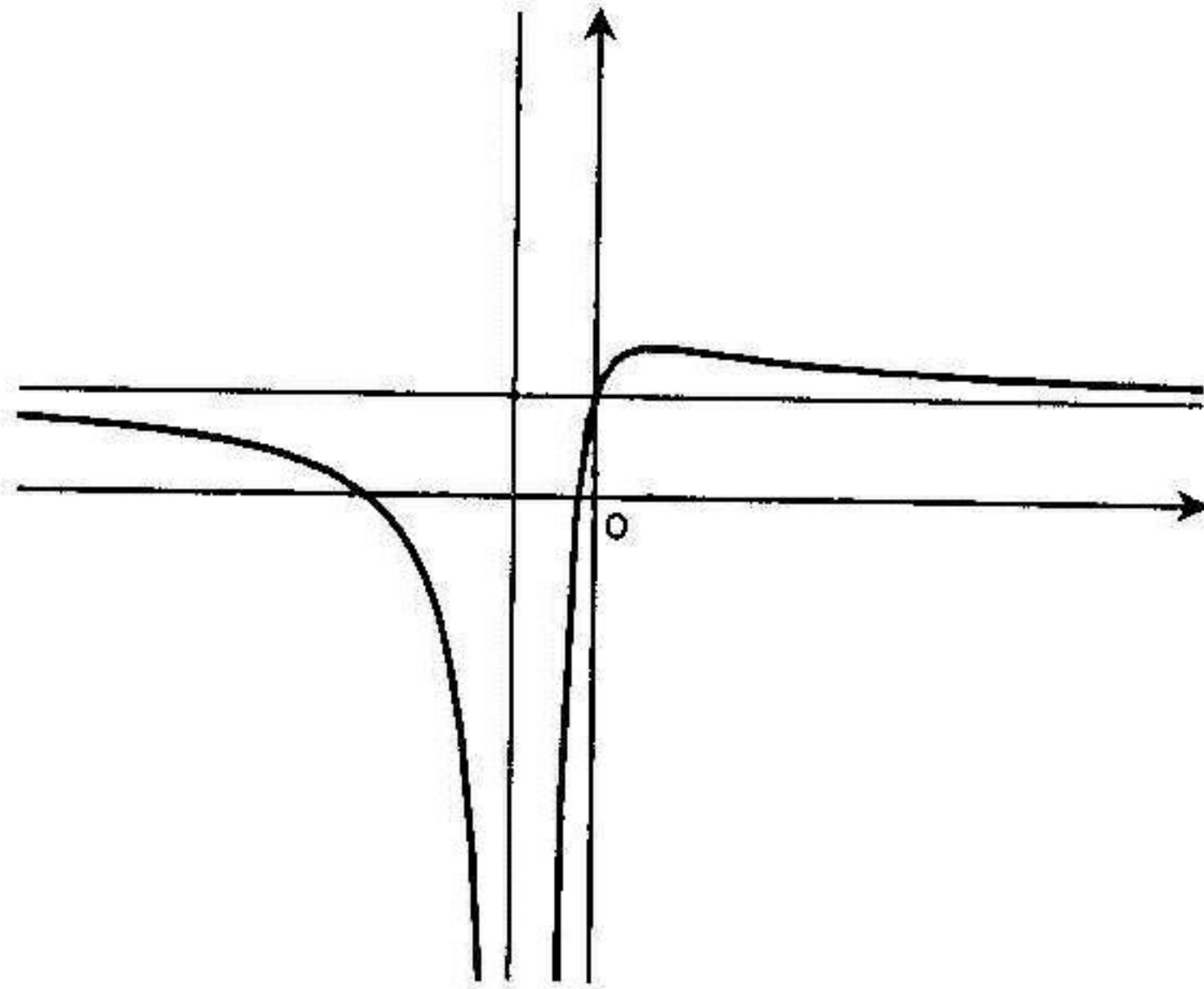
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	+	○	—
$f(x)$	2	↘	↗	↘
		$-\infty$	$-\infty$	2

الفروع اللانهائية:

• المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في
جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-9} \quad (2)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$|x| \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 3^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -3^-$$

$$x \rightarrow -3^+$$

$$x \rightarrow 3^-$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 3x + 9)}{(x^2 - 9)^2} \quad : x \in D_f \text{ من أجل كل } x \in D_f$$

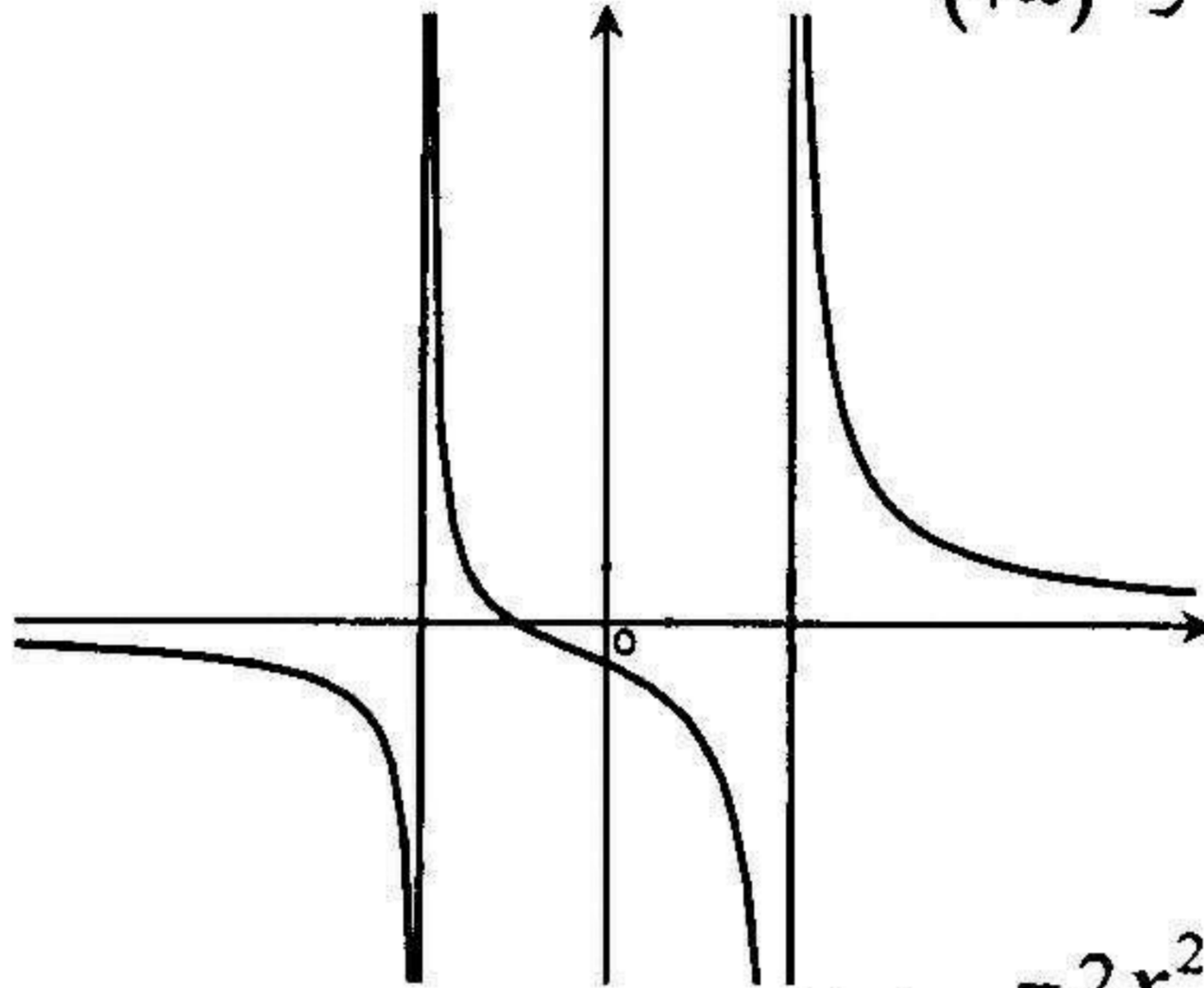
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ -∞	+∞ ↘ -∞	+∞ ↘ 0	

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 3$ و $x = -3$ مقاربان للمنحني
 - المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني

في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$
المنحني :



$$f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1} \quad (3)$$

$$D_f =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 4x - 7}{(2x - 1)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$		$+\infty \searrow -\infty$

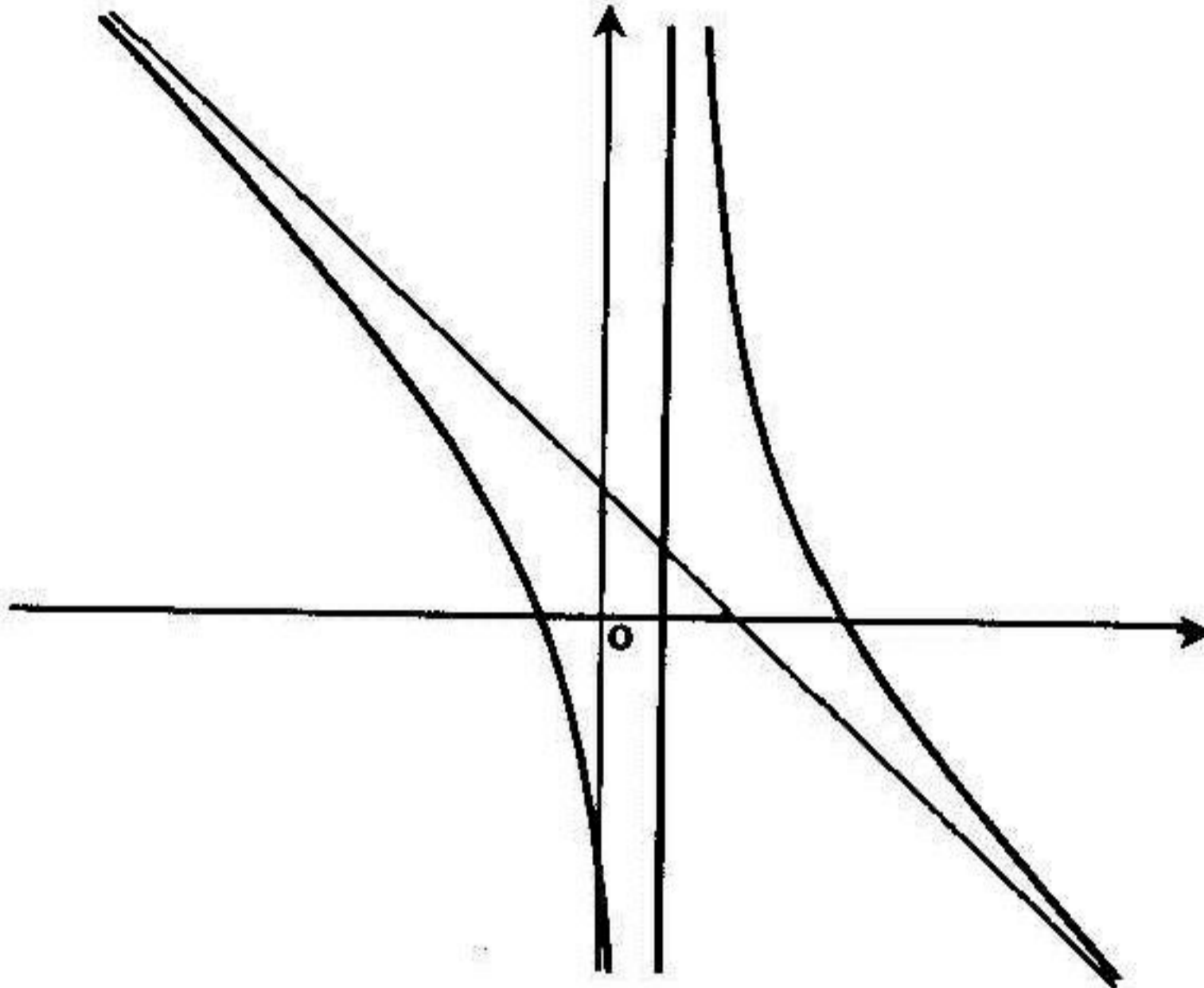
جدول التغيرات :

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3} \quad (4)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

حساب النهايات :

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2} : x \in D_f \text{ من أجل كل}$$

حساب المشتق :

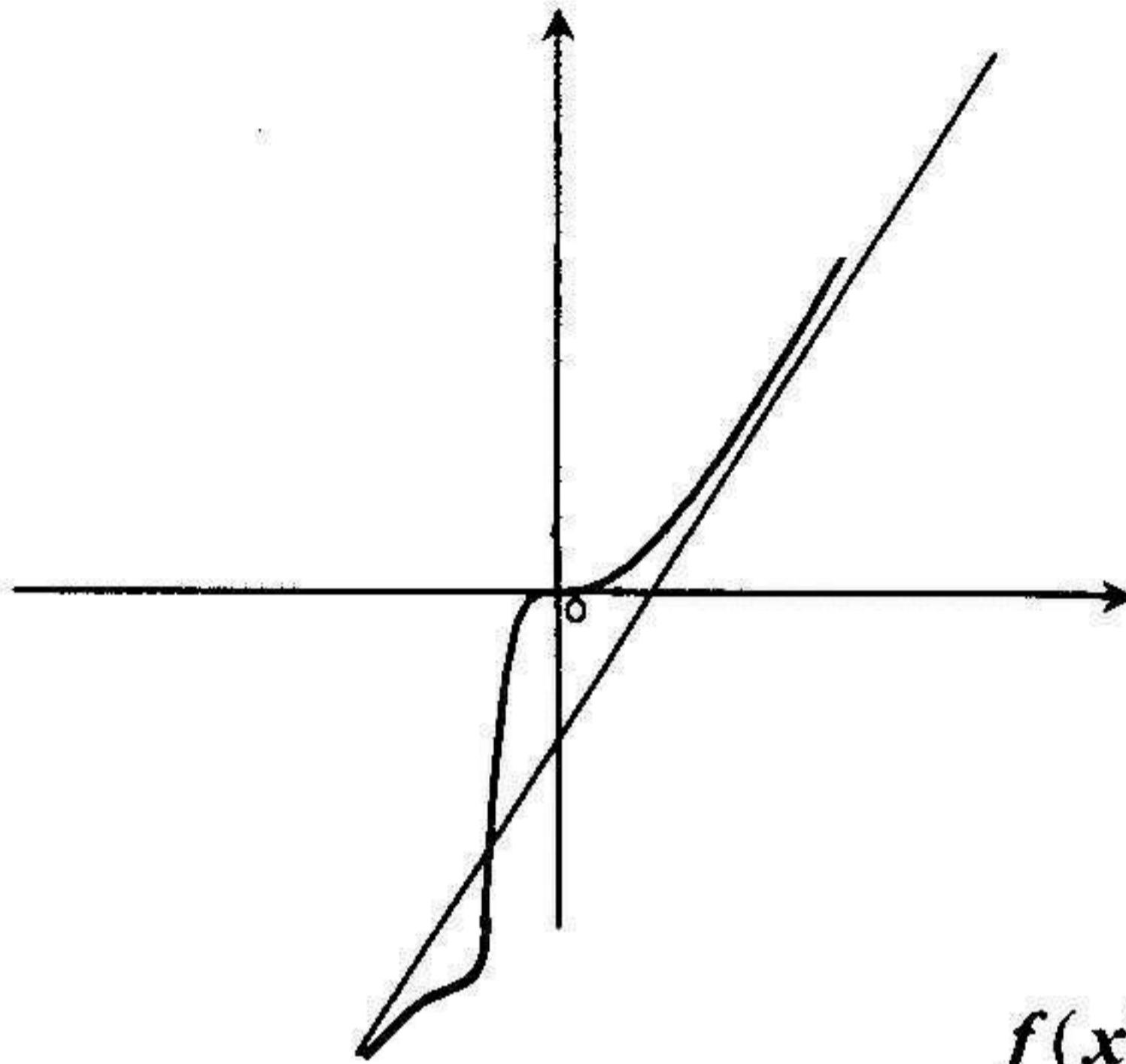
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \quad (5)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x + 4)}{(x+1)^3}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

جدول التغيرات :

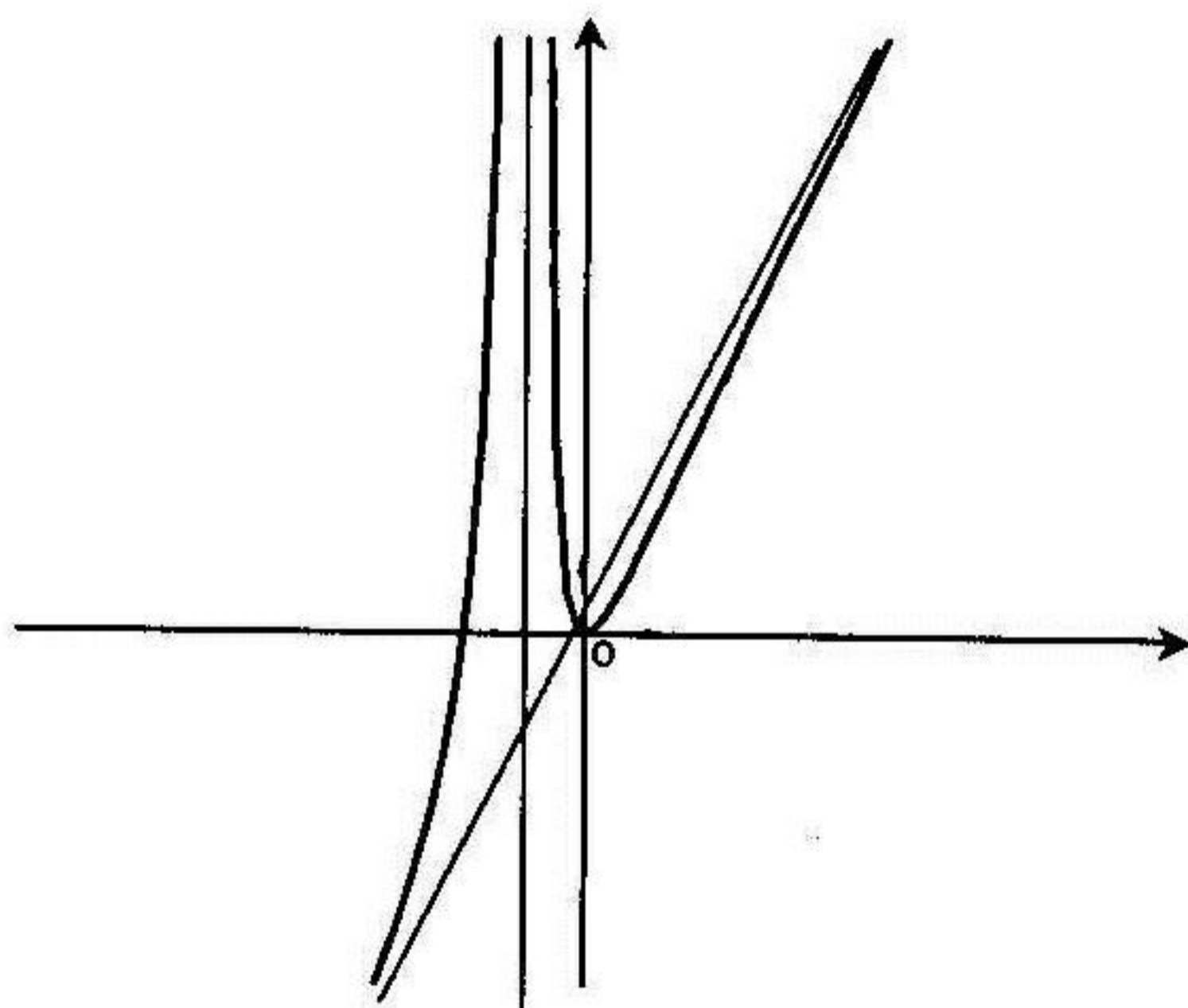
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -1$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$

جدول التغيرات :

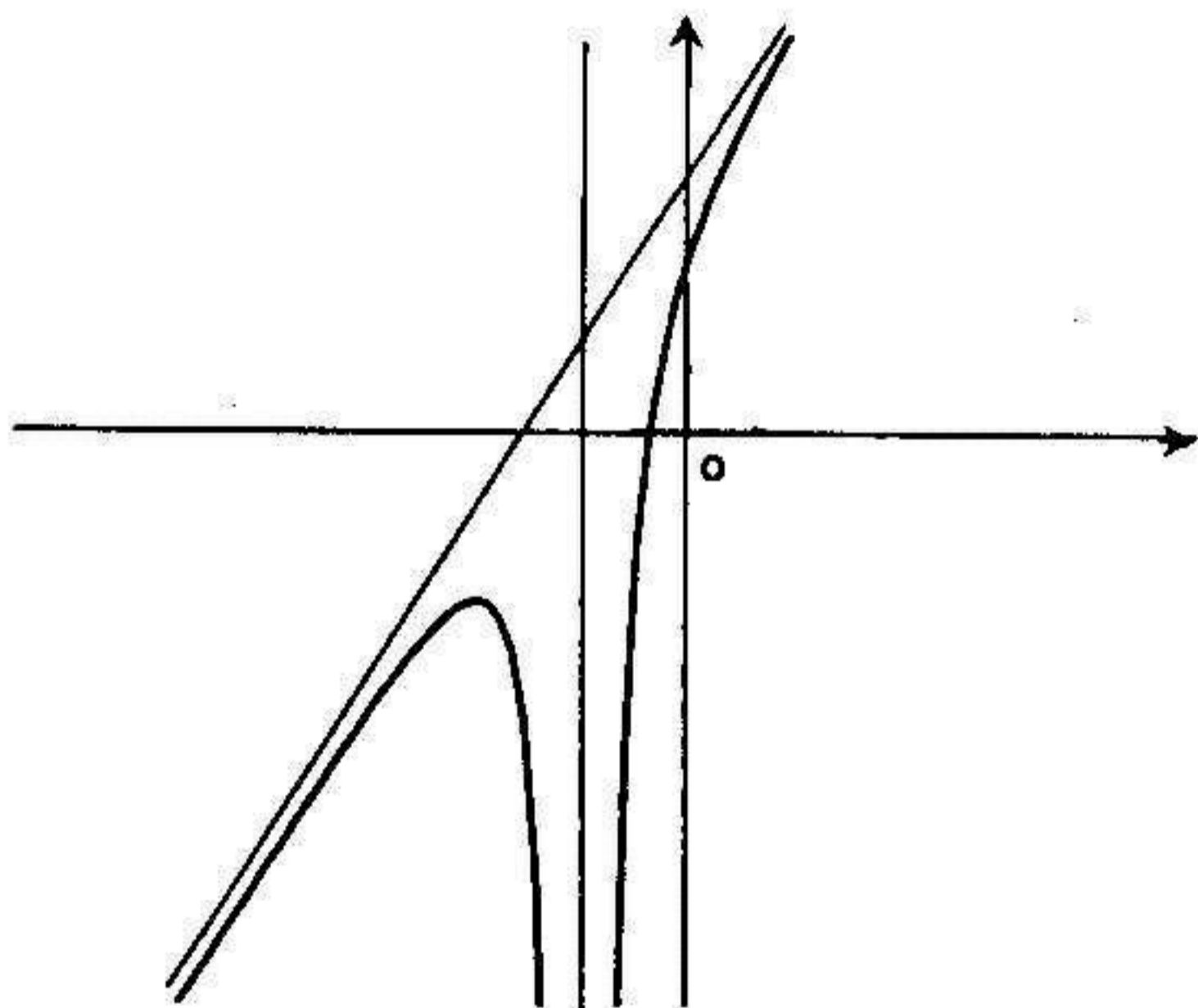
x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى

- المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ هو مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحنى :



مسائل محلولة

مسألة 1

I. لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(x^2 - 2x - 3)}$

نسمى (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

- 1- أ) احسب $f(+2)$, $f(+1)$, $f(0)$. ب) ادرس تغيرات الدالة f .
 2- أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . ب) ادرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي (Δ) . ج) برهن بأن المستقيم $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (c) . 3) أنشئ المنحنى (c) . 4- أ) عين العددين الحقيقيين

$$\alpha \text{ و } \beta \text{ حيث من أجل كل } x \in D_f : \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

ب) استنتج على المجال $]-3; +\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

ج) احسب المساحة المحددة بالمنحنى (c) والمستقيمتين (Δ) ، $x = 5$ ، $x = 4$.

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(|x^2 - 2x| - 3)}$

- 1- أ) عين مجموعة تعريف الدالة g . ب) أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .
 2- أ) احسب $g'(x)$ على المجال $]0; 2[$. ب) استنتج تغيرات الدالة g على مجموعة تعريفها .

الحل

I. 1- أ) حساب $f(+2)$, $f(+1)$, $f(0)$

$$f(0) = -\frac{11}{6} , f(+1) = -\frac{3}{2} , f(+2) = -\frac{11}{6}$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

- مجموعة تعريف : تكون f معرفة إذا كان $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ ومنه : $x \neq -1$ و $x \neq 3$

$$\text{إذن : } D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$$

- حساب النهايت :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة اشارته :

$$f'(x) = \frac{8(1-x)}{(x^2-2x-3)^2} \quad \text{من أجل كل } x \in D_f \text{ لدينا :}$$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	\circ	$-$	$-$
$f(x)$	$-1/2$	$+\infty$	$-3/2$	$+\infty$	$-1/2$

3- (أ) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 3$ و $x = -1$ هما مستقيمان مقاربين للمنحني (c).

المستقيم ذي المعادلة $y = -\frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي (Δ)

$$f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(x^2 - 2x - 3)} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$$

إن وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) تتعلق بإشارة $x^2 - 2x - 3$.

$x^2 - 2x - 3 > 0$ من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ ، إذن على هذا المجال

(c) فوق (Δ). من أجل $x \in]-1; 3[$ لدينا $x^2 - 2x - 3 < 0$ ويكون على هذا

المجال (c) تحت (Δ).

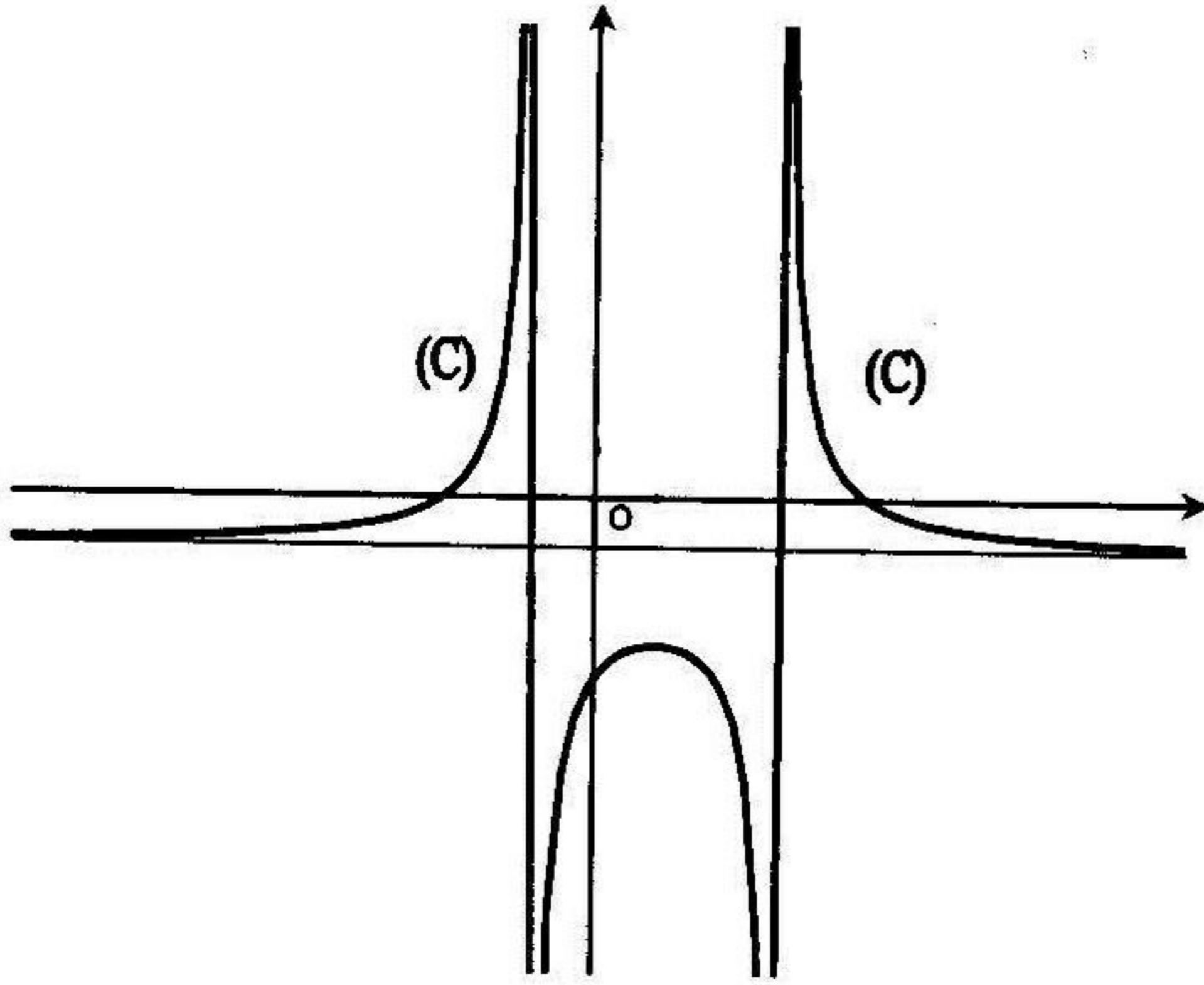
(ج) البرهان على أن المستقيم $x = 1$ هو محور تناظر للمنحني (c)

$x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (c) للدالة f يعني $f(2\alpha - x) = f(x)$.

$$f(2-x) = \frac{-(2-x)^2 + 2(2-x) + 11}{2[(2-x)^2 - 2(2-x) - 3]} = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(x^2 - 2x - 3)} = f(x)$$

إذن المستقيم $x = 1$ هو محور تناظر للمنحنى (c).

(3) إنشاء المنحنى (c)



4- أ) تعيين العددين الحقيقيين α و β

من أجل كل $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} &= \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3} = \frac{\alpha(x-3) + \beta(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)x + \beta - 3\alpha}{x^2 - 2x - 3} \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد : $\alpha + \beta = 0$ و $\beta - 3\alpha = 1$ ومنه : $\alpha = -\frac{1}{4}$ و $\beta = \frac{1}{4}$

(ب) تعيين على المجال $[-3; +\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-3} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-3) + c \end{aligned}$$

(ج) حساب المساحة المحددة بالمنحني والمستقيات $x=4$ و $x=5$ و (Δ)

$$\begin{aligned} S &= \int_4^5 \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] dx = \int_4^5 \frac{4}{x^2 - 2x - 3} dx = 4 \int_4^5 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx \\ &= [\ln(x-3) - \ln(x+1)]_4^5 = \left[\ln \frac{x-3}{x+1} \right]_4^5 = \ln \frac{5}{3} \text{ (u.a)} \end{aligned}$$

II. 1- أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة g

لكون الدالة g غير معرفة إذا كان $|x^2 - 2x| - 3 = 0$ ومنه :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0^* ; x \in]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[\\ -x^2 + 2x - 3 = 0^{**} ; x \in]0; 2[\end{cases}$$

المعادلة * تقبل حلين $x = -1$ و $x = 3$ أما المعادلة ** ليست لها حلول إذن مجموعة

تعريف الدالة g هي : $D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$

(ب) كتابة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

من أجل $x \in]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[$ لدينا : $g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(x^2 - 2x - 3)}$

من أجل $x \in]0; 2[$ لدينا : $g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(-x^2 + 2x - 3)}$

2- أ) حساب $g'(x)$ على المجال $]0; 2[$

$$g'(x) = \frac{(-2x+2) \times 2(-x^2+2x-3) - 2(-2x+2)(-x^2+2x+11)}{4(-x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{14(x-1)}{(-x^2+2x-3)^2}$$

(ب) جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	-	○	+	-	-
$g(x)$	$-1/2$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $-11/6$ ↘ -3	$-11/6$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-1/2$	$-\infty$ ↗ $-11/6$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-1/2$	$-1/2$

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = |x+2| + \frac{4x}{x^2-4}$ وليكن (c) التمثيل البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس . -1 أ) احسب $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$
(ب) أدرس تغيرات الدالة f .

-2 أ) برهن على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]-4; -3[$ حيث $f(\alpha) = 0$.

(ب) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]-2; 2[$

-3 أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . (ب) أوجد معادلة المماس (Δ)

للمنحنى (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$. (ج) أدرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة

إلى المستقيم (Δ) على المجال $]-2; 2[$ وفسر هندسيا النتيجة . 4 أنشئ المنحنى (c)

5) احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (c) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$$x = 3 , x = 4 , y = x + 2$$

الحل

-1 أ) حساب $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$

$$f(-4) = \frac{2}{3} , f(-3) = -\frac{7}{5} , f(0) = 2$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف: $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

- على المجال $]-\infty; -2[$ لدينا : $f(x) = -(x+2) + \frac{4}{x^2-4}$

ومنه من أجل $x \in]-\infty; -2[$ لدينا : $f'(x) = -1 - \frac{4x^2+16}{(x^2-4)^2} < 0$

- على المجال $]2; +\infty[\cup]-2; 2[$ لدينا : $f(x) = (x+2) + \frac{4}{x^2-4}$

إذن من أجل $x \in]-2; 2[\cup]2; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = 0$ يكافئ $x^2(x^2-12) = 0$ ومنه $x = 0$ أو $x = 2\sqrt{3}$

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-2; 2[\cup]2; 2\sqrt{3}[$

$f'(x) > 0$ من أجل $x \in]2\sqrt{3}; +\infty[$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	-2	2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $2+3\sqrt{3}$	$+\infty$ ↗ $2+3\sqrt{3}$	$+\infty$

2- أ) البرهان على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]-4; -3[$ حيث $f(\alpha) = 0$

على المجال $]-4; -3[$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما و $f(-3) = -7/5$

$f(-4) = 2/3$ والعدد 0 ينتمي إلى المجال $]-7/5; 2/3[$ [حسب مبرهنة القيم المتوسطة
يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha \in]-4; -3[$ حيث $f(\alpha) = 0$

(ب) البرهان على أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]-2; 2[$
الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-2; 2[$ و $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ والعدد 0 ينتمي إلى المجال $]-\infty; +\infty[$ [إذن حسب مبرهنة القيم
المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد على المجال $]-2; 2[$
3- أ) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -2$ و $x = +2$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (c)
 $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - |x + 2|] = 0$ إذن المنحني (c) يقبل في جوار $(-\infty)$ المستقيم ذي
المعادلة $y = -x - 2$ مستقيم مقارب كما يقبل في جوار $(+\infty)$ المستقيم ذي المعادلة
 $y = x + 2$ مستقيم مقارب

(ب) معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة $x = 0$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 0 \times x + 2 = 2$$

(ج) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ) على المجال $]-2; 2[$

$$f(x) - 2 = x + 2 + \frac{4x}{x^2 - 4} = \frac{x^3}{x^2 - 4} = x^2 \times \frac{x}{x^2 - 4}$$

بإشارة $\frac{x}{x^2 - 4}$ من أجل $x \in]-2; 0[$ لدينا $f(x) - 2 > 0$ ويكون المنحني (c)

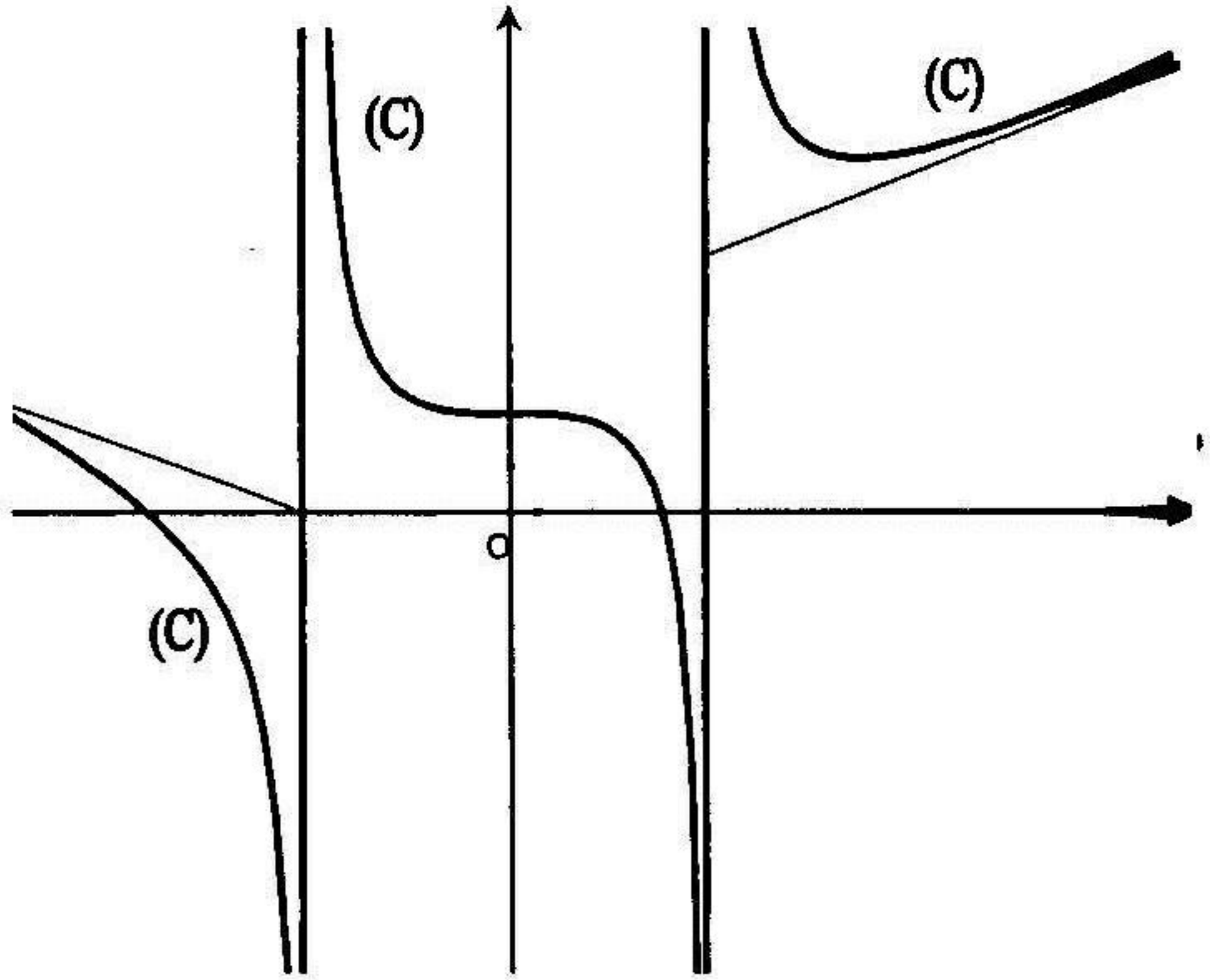
في هذا المجال فوق المماس (Δ) . $f(x) - 2 < 0$ من أجل $x \in]0; 2[$ ويكون

المنحني (c) في هذا المجال تحت المماس (Δ) . نستنتج من هذه الدراسة أن

المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة $x = 0$ يقطع المنحني (c) وهذا يعني

أن النقطة $(0; 2)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (c) .

(4) إنشاء المنحني (c) :



(5) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$$y = x + 2 \text{ و } x = 4 \text{ و } x = 3$$

$$S = \int_3^4 f(x) - (x+2) dx = \int_3^4 \frac{4x}{x^2-4} dx = 2 \int_3^4 \frac{2x}{x^2-4} dx =$$

$$= 2 \left[\ln(x^2-4) \right]_3^4 = 2(\ln 12 - \ln 5) = 2 \ln \frac{12}{5} \text{ (u.a)}$$

مسألة 3

1. لكن f الدالة العددية المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{2(x+1)^2}$ وليكن (c)

ممثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(1) أوجد الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل $x \neq -1$ فإن :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+1)^2} \quad (2) \text{ أدرس تغيرات الدالة } f$$

(3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) وحدد وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).

4- (أ) برهن أن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in \left] -2; -\frac{3}{2} \right[$.

(ب) برهن بأن المنحني (c) يقبل في نقطة يطلب تعيينها مماسا موازيا للمستقيم (D) ذو المعادلة $7x + y + 1 = 0$. (5) أنشئ المنحني (c).

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة :

$$2x^3 + 2(2-m)x^2 + (1-2m)(2x+1) = 0$$

$$II. \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة بـ: } g(x) = \frac{2x^2(|x|+2) + 2|x| + 1}{2(|x|+1)^2}$$

(1) برهن بأن الدالة g زوجية. (2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند النقطة $x = 0$

(3) باستعمال المنحني (c) اشرح كيف يمكن إنشاء المنحني (Γ) للدالة g.

الحل

I. (1) تعيين الأعداد a, b, c

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{2ax^3 + (4a+2b)x^2 + (2a+4b)x + 2b+c}{2(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{2(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد : $a = 1$ و $4a + 2b = 4$ و $2a + 4b = 2$ و $2b + c = 1$

$$\text{ومنه : } a = 1, b = 0, c = 1 \text{ إذن : } f(x) = x + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

(2) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{(x+1)^3} = \frac{(x^2 + 3x + 3)}{(x+1)^2} \times \frac{x}{x+1}$$

من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $x^2 + 3x + 3 > 0$ ($\Delta < 0$) إذن إشارة $f'(x)$ هي

إشارة $\frac{x}{x+1}$ ومنه $f'(x) = 0$ لما $x = 0$. $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-1; 0[$

و $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	↗		↘ ↗	
			$1/2$	

3) دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (c) وتحديد وضعية (c) بالنسبة إلى (Δ)

المستقيم $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (c)

$$\text{إذن المستقيم } (\Delta) \text{ ذي } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(x+1)^2} = 0$$

المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$.

$$f(x) - x = \frac{1}{2(x+1)^2} > 0 \text{ إذن من أجل كل } x \in D_f \text{ يكون (c) فوق } (\Delta)$$

4- أ) البرهان على أن (c) يقطع ($x'x$) في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2; -3/2[$

على المجال $]-\infty; -1[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما فهي تقابل للمجال $]-\infty; -1[$

على المجال $]-\infty; +\infty[$ (إذن في المجال $]-\infty; -1[$ المنحنى (c) يقطع في نقطة وحيدة

وبما أن $f(-2) \times f(-3/2) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فتكون نقطة

تقاطع (c) مع $(x'x)$ هي النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث $x_0 \in]-2; -3/2[$.

على المجال $]-1; +\infty[$ لدينا $f(x) > 0$ (من جدول تغيرات) وبالتالي على هذا المجال المنحني (c) لا يقطع $(x'x)$.

ب) البرهان على أن (c) يقبل في نقطة يطلب تعيينها مماسا يوازي (D)

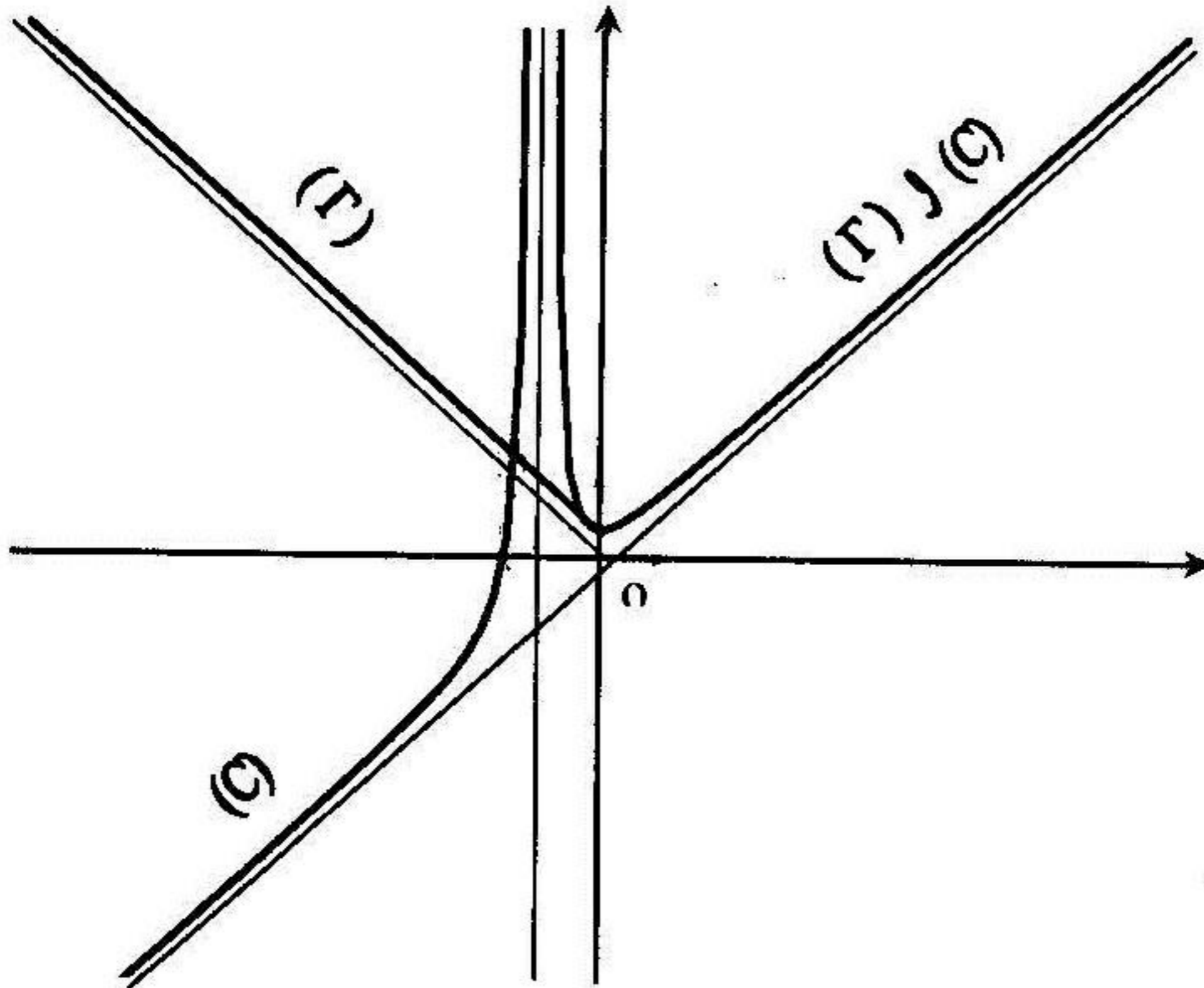
المماس للمنحني (c) عند النقطة x_0 يوازي المستقيم (D) ذو المعادلة

$$1 - \frac{1}{(x+1)^3} = -7 \text{ ومنه } f'(x_0) = -7 \text{ يعني } 7x + y + 1 = 0$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{(x+1)^3} = 8 \text{ ومنه } (x+1)^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ ومنه } x_0 = -\frac{1}{2}$$

إذن المنحني (c) يقبل في النقطة $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ مماسا يوازي المستقيم (D)

(5) إنشاء المنحني (c)



(6) المناقشة بيانياً وحسب قيم الوسيط m لحلول المعادلة :

$$2x^3 + 2(2-m)x^2 + (1-2m)(2x+1) = 0 \text{ ومنه}$$

$$2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 - 2mx^2 - 4mx - 2m = 0 \text{ ومنه :}$$

$$\frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{2(x^2 + 2x + 1)} = m \text{ ومنه } 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + 2x + 1)m$$

$$\text{ومنه } \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{2(x+1)^2} = f(x) = m \text{ من التمثيل البياني للدالة } f \text{ نلاحظ أن :}$$

إذا كان $m \in]-\infty; 1/2[$ المعادلة المعطاة تقبل حل وحيد

إذا كان $m = 1/2$ المعادلة تقبل حلين

إذا كان $m \in]1/2; +\infty[$ المعادلة المعطاة تقبل ثلاثة حلول .

التمرين 1 - البرهان على أن الدالة g زوجية

$$g(-x) = \frac{2x^2(|-x|+2) + 2|-x|+1}{2(|-x|+1)^2} = \frac{2x^2(|x|+2) + 2|x|+1}{2(|x|+1)^2} = g(x)$$

(2) دراسة قابلية الاشتقاق الدالة g عند النقطة $x = 0$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-2x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{2(-x+1)^2} ; x < 0 \\ \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{2(x+1)^2} = f(x) ; x > 0 \end{cases}$$

مشتق الدالة g على يسار $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-2x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{2(-x+1)^2} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^2 + 3x}{2(-x+1)^2} = 0$$

لأن الدالة g قابلة الاشتقاق على يسار 0

مشتق الدالة g على يمين $x = 0$

، إذن فالدالة g قابلة الاشتقاق $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{2(x+1)^2} = 0$

على يمين $x = 0$ ، بما أن المشتق على اليمين يساوي المشتق على اليسار فالدالة g قابلة الاشتقاق عند النقطة $x = 0$.

(3) شرح إنشاء المنحني (Γ) للدالة g باستعمال المنحني (c)

على المجال $[0; +\infty[$ لدينا $g(x) = f(x)$ ، إذن على هذا المجال (c) و (Γ) متطابقان وبما أن الدالة g زوجية فيكون منحنيها في المجال $]-\infty; 0]$ يناظر بالنسبة إلى محور الترتيب المنحني (Γ) في المجال $[0; +\infty[$.

دوال ناطقة مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

$$1) f(x) = \frac{x-3}{x+2} + \frac{20}{x}$$

$$2) f(x) = \frac{2x^2 + x - 13}{x^2 - x - 2}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 5x - 2}{2(x+1)}$$

$$4) f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 11}{2(x^2 - 2x - 3)}$$

$$5) f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{2x - 1}$$

$$6) f(x) = \frac{2x+1}{4x^2 + 3|x| - 1}$$

$$7) f(x) = \frac{|4x^2 - x - 3|}{2x^2 + 2x - 9}$$

$$8) f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{|x - 2|}$$

$$9) f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

$$10) f(x) = x - 5 + \frac{19}{x} + \frac{15}{x^2}$$

$$11) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$$

$$12) f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x+1)^2}$$

$$13) f(x) = \frac{x^2 + 7|x+1|}{2x + |x-6|}$$

$$14) f(x) = \frac{x^4}{x^2 - x - 6}$$

$$15) f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^4}$$

$$16) f(x) = \frac{x^3 - 5x - 5}{x^2 - 2x - 2}$$

$$17) f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x+1)^2}$$

$$18) f(x) = \frac{3x^4 + 3x^3 - 2x^2}{x-1}$$

$$19) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

$$20) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

مسائل مقترحة للحل

مسألة 1

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ وليكن (c) منحنياً

البياني في معلم متعامد ومتجانس .

(1-أ) أحسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-4)$. (ب) ادرس تغيرات الدالة f

(2-أ) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . (ب) ادرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة

إلى المستقيم المقارب الأفقي . (ج) عين نقاط التقاطع للمنحنى (c) مع المحاور.

(3) أنشئ المنحنى (c) . (4) نقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول

$$\text{المعادلة: } (3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$$

(5-أ) عين الأعداد الحقيقية α, β, γ بحيث مهما يكن x من مجموعة التعريف

الدالة f فإن: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\lambda}{x-2}$. (ب) استنتج دالة أصلية للدالة f

على المجال $]-\infty; -1[$. (ج) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد

بالمنحنى (c) والمستقيمتين: $y=3$, $x=\lambda$, $x=-2$ حيث: $-2 < \lambda < -1$

(د) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -1} S(\lambda)$.

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = \frac{3x^2 - |x| - 2}{x^2 - |x| - 2}$ (1) برهن بأن الدالة g زوجية

(2) ادرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x_0 = 0$ وفسر هندسيا هذه النتيجة

(3) باستعمال المنحنى (c) أنشئ المنحنى (γ) للدالة g .

مسألة 2

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ وليكن (c) منحنياً البياني في معلم

متعامد ومتجانس . (1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c, d بحيث $\forall x \neq 1$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} \quad (2) \text{ أدرس تغيرات الدالة } f$$

(3- أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيينه .

(ب) ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

(4- أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع المحاور ومع المستقيم (D)

(ب) أنشئ المنحني (c) . (ج) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $x_0 = 0$

(5- أ) احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (c)، المستقيم (D)

والمستقيمين $x = 2$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda > 2$. (ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

مسألة 3

لكن الدالة العددية g والمعرفة بـ: $g(x) = \frac{ax^2 + bx}{2(x-c)^2}$ وليكن (c) منحنيها البياني

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c لكي المنحني (c) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما

$$x = 1 \text{ و } y = \frac{3}{2} \text{ ويقبل مماسا عند النقطة } x_0 = 0 \text{ معادلته } y = -2x$$

المعبر الدالة العددية f والمعرفة بـ: $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{2(x-1)^2}$. (1) ادرس تغيرات الدالة f

(2) أ) عين معادلة المماس لـ (c) عند النقطة $x_0 = 0$ وكذلك عند النقطة $x_1 = 3/2$.

(ب) ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي . (3) أنشئ المماسين

والمحني (c) . (4) ليكن (D_m) المستقيم ذو المعادلة $y = 4x + m$ حدد بيانيا عدد

حلول المعادلة $f(x) - 4x = m$ حيث: $m \in \mathbb{R}$. (5) لتكن الدالة p المعرفة

$$p(x) = \frac{3x^2 + 4|x|}{2(-|x| - 1)^2} \quad (1) \text{ اثبت أن } p \text{ دالة زوجية .}$$

(ب) اكتب $p(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة . (ج) استنتج بيان الدالة p في نفس المعلم

مسألة 4

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$

(1) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث $f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

(2) ادرس تغيرات الدالة f . (3-1) برهن بان المنحني (c) للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين إحداهما مائل يطلب إعطاء معادلته. (ب) ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل. (4) أنشئ المنحني (c) .

(5) باستعمال المنحني (c) ، ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة

$$\text{حلول المعادلة: } x^3 - (4+m)x^2 + 2(4+m)x - 4 - m = 0$$

(6-1) α عدد حقيقي أصغر تماما من $\frac{2}{3}$. احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq \frac{2}{3} \\ f(x) \leq y \leq (x-2) \end{cases} \quad \text{مجموعة النقاط } M(x; y) \text{ حيث}$$

(ب) احسب $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} S(\alpha)$

مسألة 5

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = 2|x| - 2 + \frac{1}{(x+1)^2}$ وليكن (c) المنحني البياني

لها في معلم متعامد ومتجانس. (1-1) ادرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$.

(ب) فسر هندسيا النتيجة. (2) ادرس تغيرات الدالة f .

(3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

(4-1) برهن بان المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α, β حيث:

$$(ب) \text{ أنشئ المنحني } (c) \quad -\frac{1}{4} < \alpha < -\frac{1}{8} \quad \text{و} \quad \frac{3}{4} < \beta < 1$$

(5) احسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 2x - 2$$

مسألة 6

لتكن الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = |x-2| + \frac{4}{x+2}$

ليكن (c) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

(1-ا) ادرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 2$. (ب) فسر هندسيا النتيجة

(2) ادرس تغيرات الدالة f

(3-ا) اكتب معادلة النصفى المماسين للمنحنى (c) عند النقطة $x_0 = 2$

(ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) واستنتج أن المنحنى له مستقيمين مقاربين

مائلين (D) و (D') متعامدين . (4) ارسم النصفى المماسين والمنحنى (c)

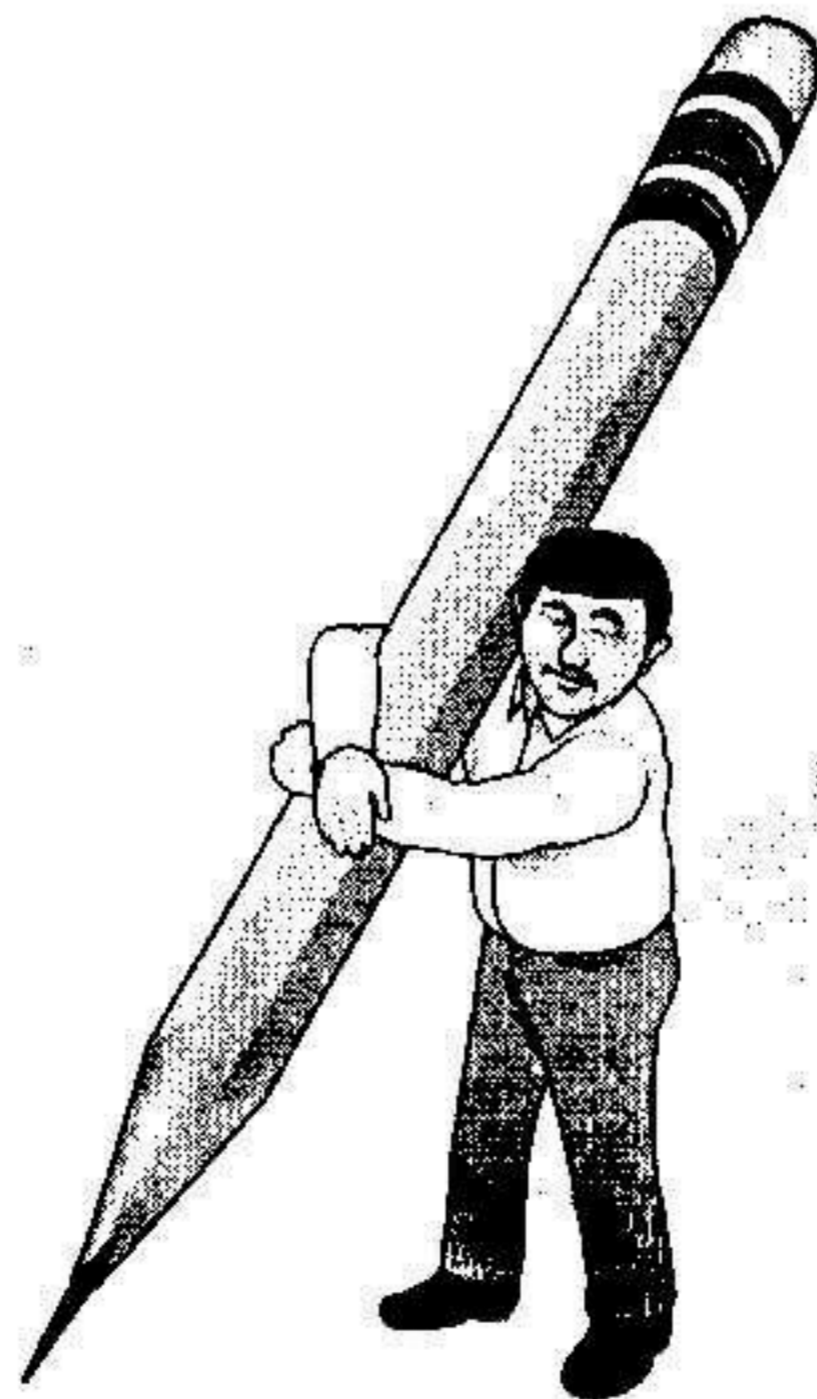
(5) لئلاش بيانيا وحسب الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$

(6) لعبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي النقطة

$$\begin{cases} x' = (\alpha - 2)x + (\alpha - 1)y - 2 \\ y' = (\alpha - 1)x - (2 - \alpha)y + 2 \end{cases} \text{ حيث : } M'(x', y')$$

لئلاش حسب قيم α مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل (T)

(ب) هن معادلة صورة منحنى الدالة f بالتحويل $T_1 (\alpha = 1)$



الدوال الجذرية

الدوال الجذرية هي الدوال العددية ذات المتغير الحقيقي x وتحتوي العبارة $\sqrt{f(x)}$.

• الدوال الجذرية من الشكل $x \rightarrow \sqrt{f(x)}$

الدالة $x \rightarrow \sqrt{f(x)}$ معرفة إذا كان $f(x) \geq 0$ ، وقابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة x_0

من مجموعة تعريفها حيث $f(x_0) \neq 0$ ومشتقتها هو معرف بـ: $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

(1) - الدالة: $x \rightarrow \sqrt{ax+b}$

هذه الدالة معرفة إذا كان $ax+b \geq 0$ وقابلة للاشتقاق على المجال: $D_f = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

ومن أجل كل $x \in D_f = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$ فإن: $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

منحني هذه الدوال يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب عند النقطة $x_0 = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

منحني هذه الدوال له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل بجوار $(-\infty)$ أو $(+\infty)$ وهذا حسب مجموعة تعريف الدالة

(2) - الدالة: $x \rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c}$

إذا كان $b-4ac \geq 0$ فتكون مجموعة التعريف الدالة هي:

$D_f =]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ لما $a > 0$ و $D_f = [x_1; x_2]$ لما $a < 0$

حيث x_1, x_2 هما جذور المعادلة: $ax^2+bx+c=0$

إذا كان $b^2-4ac < 0$ فتكون مجموعة التعريف الدالة هي $D_f =]-\infty, +\infty[$ لما $a > 0$

منحني الدالة يقبل في كل من النقطتين x_0, x_1 مماس يوازي محور الترتيب.

إذا كان $a > 0$ منحني هذه الدالة يقبل مستقيمين مقاربين مانلين في

جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

أمثلة على دراسة الدوال الجذرية

للمدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

1) $f(x) = x - \sqrt{2-x}$

2) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

3) $f(x) = x + \sqrt{x^2+2}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2}$

5) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}$

الحل

$f(x) = x - \sqrt{2-x} \quad (1)$

$D_f =]-\infty, 2]$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$x \rightarrow -\infty$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

من أجل كل $x \in D_f$: المشتق

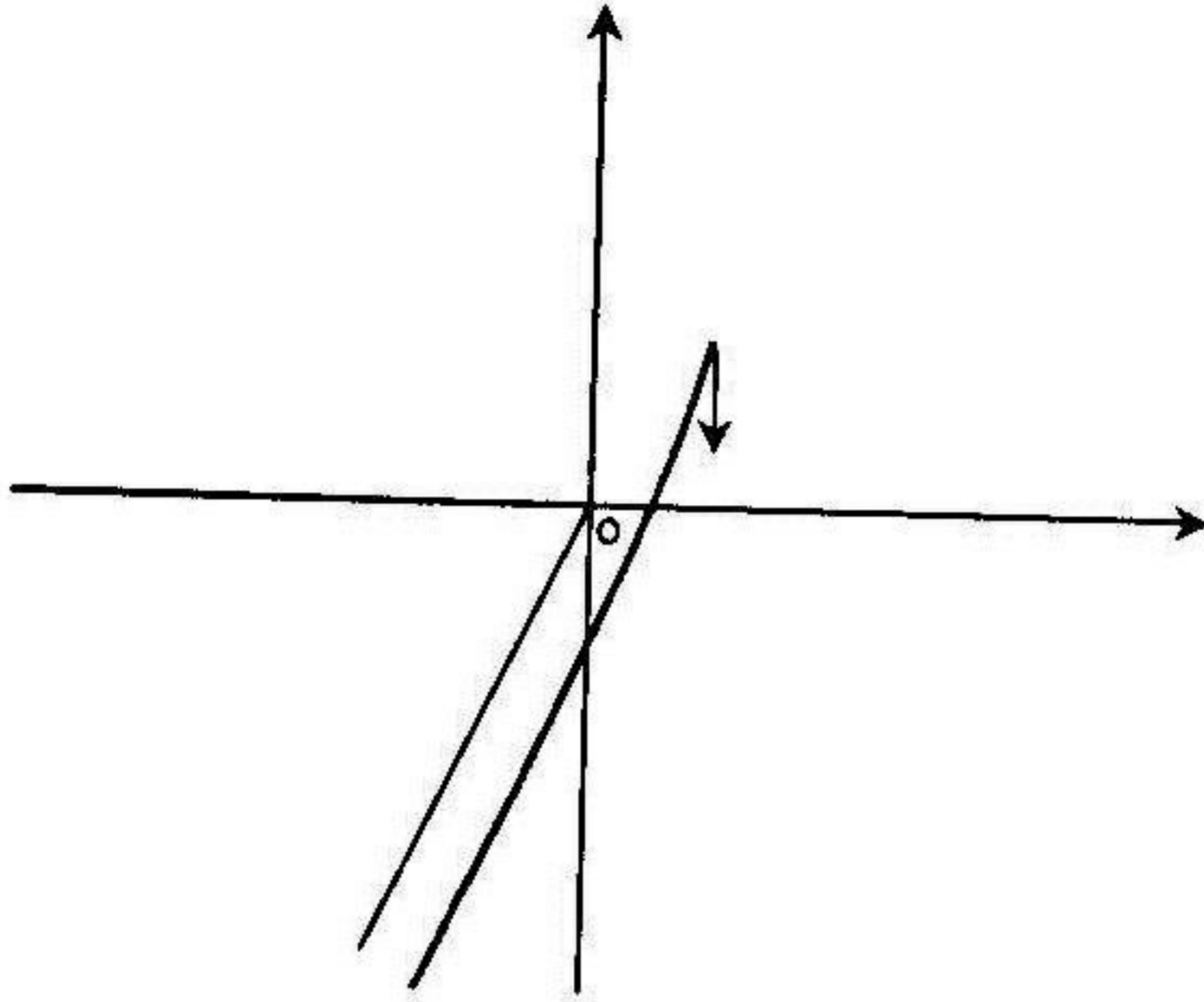
تغيرت

x	$-\infty$	2
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	2

الفروع اللانهائية :

المنحني يقبل في جوار $(-\infty)$ فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

المنحني :



$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad (2)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f = [-2, 2]$$

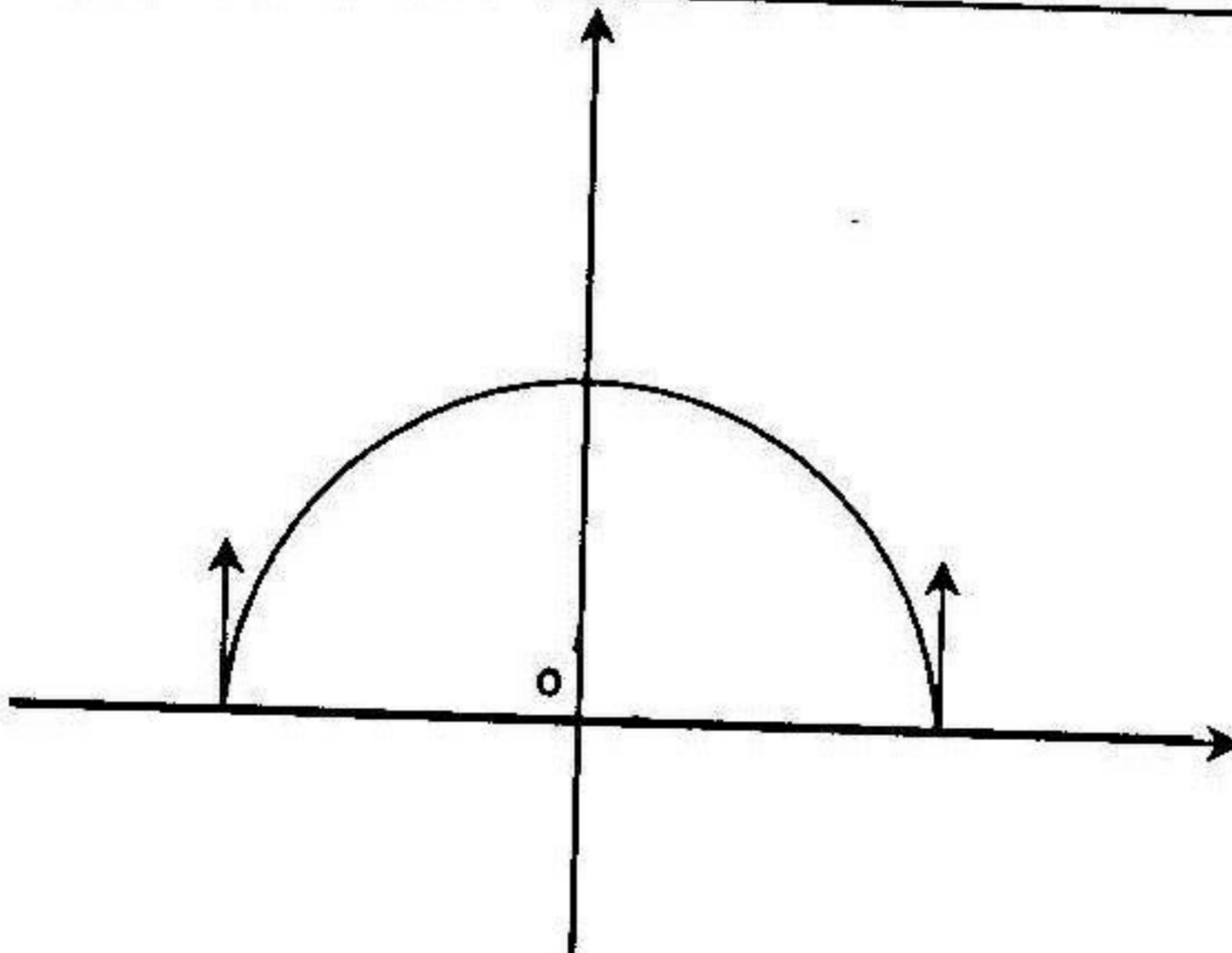
$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$			

المنحني :



$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2} \quad (3)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

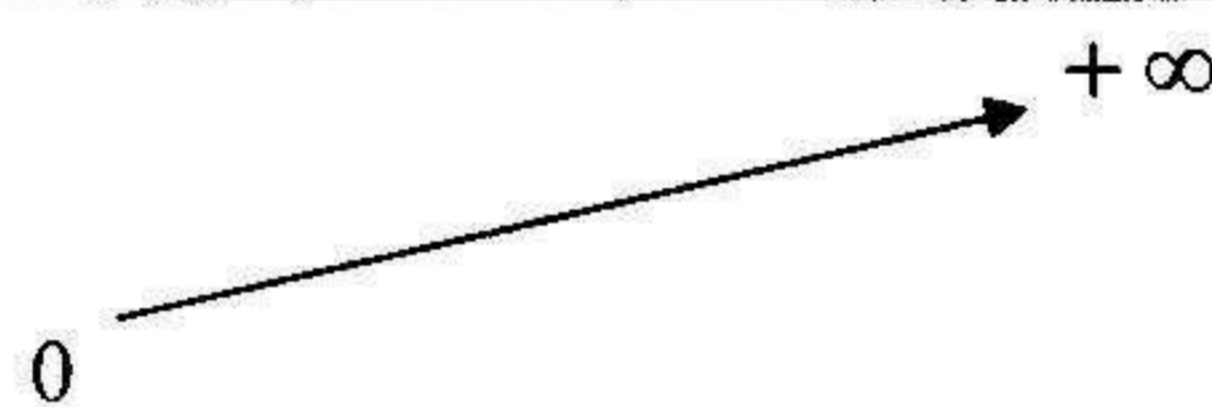
$$x \rightarrow +\infty$$

حساب النهايات :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

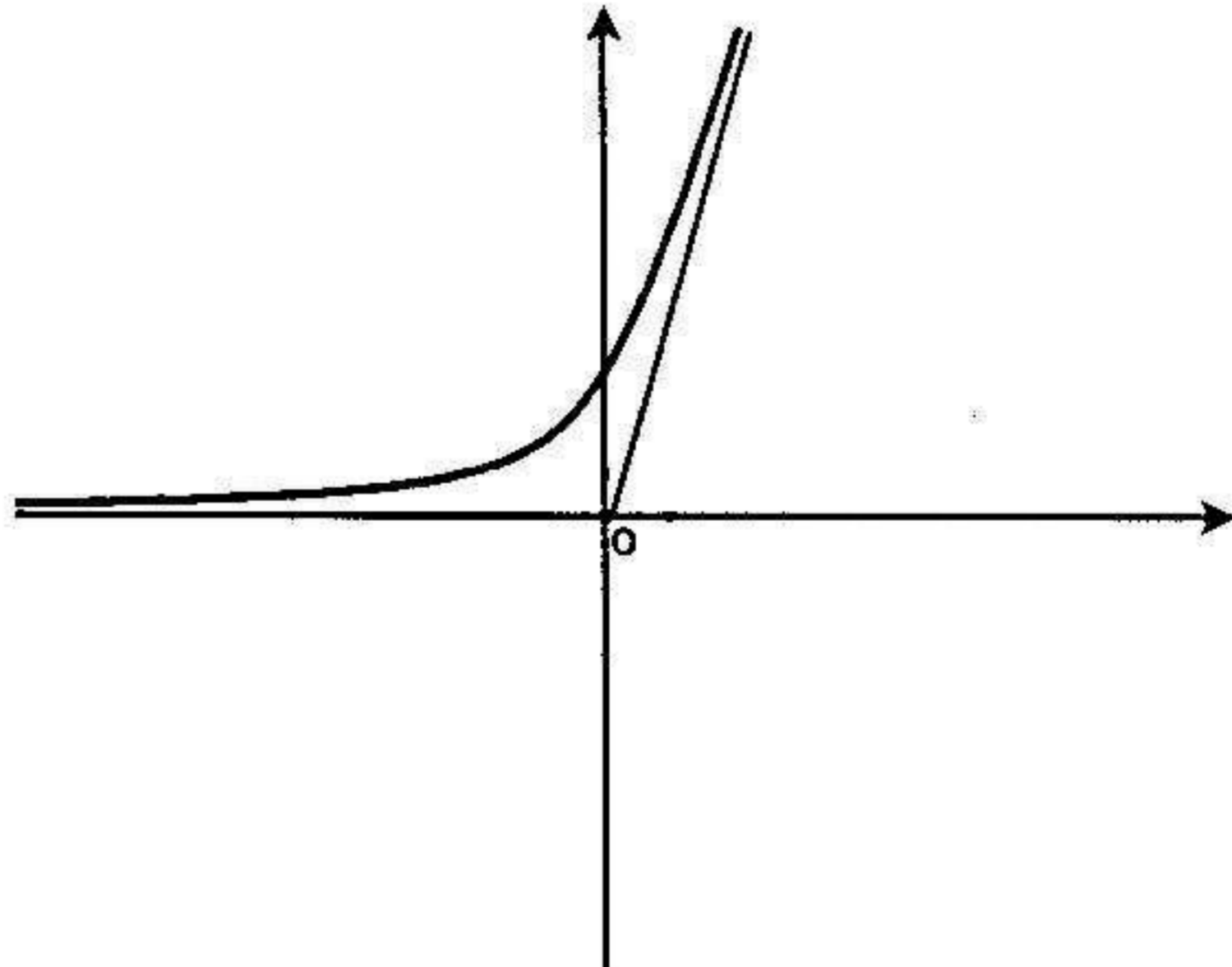
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

الحدود اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$

المطلبي :



$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad (4)$$

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب النهايات :

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$			$+\infty$

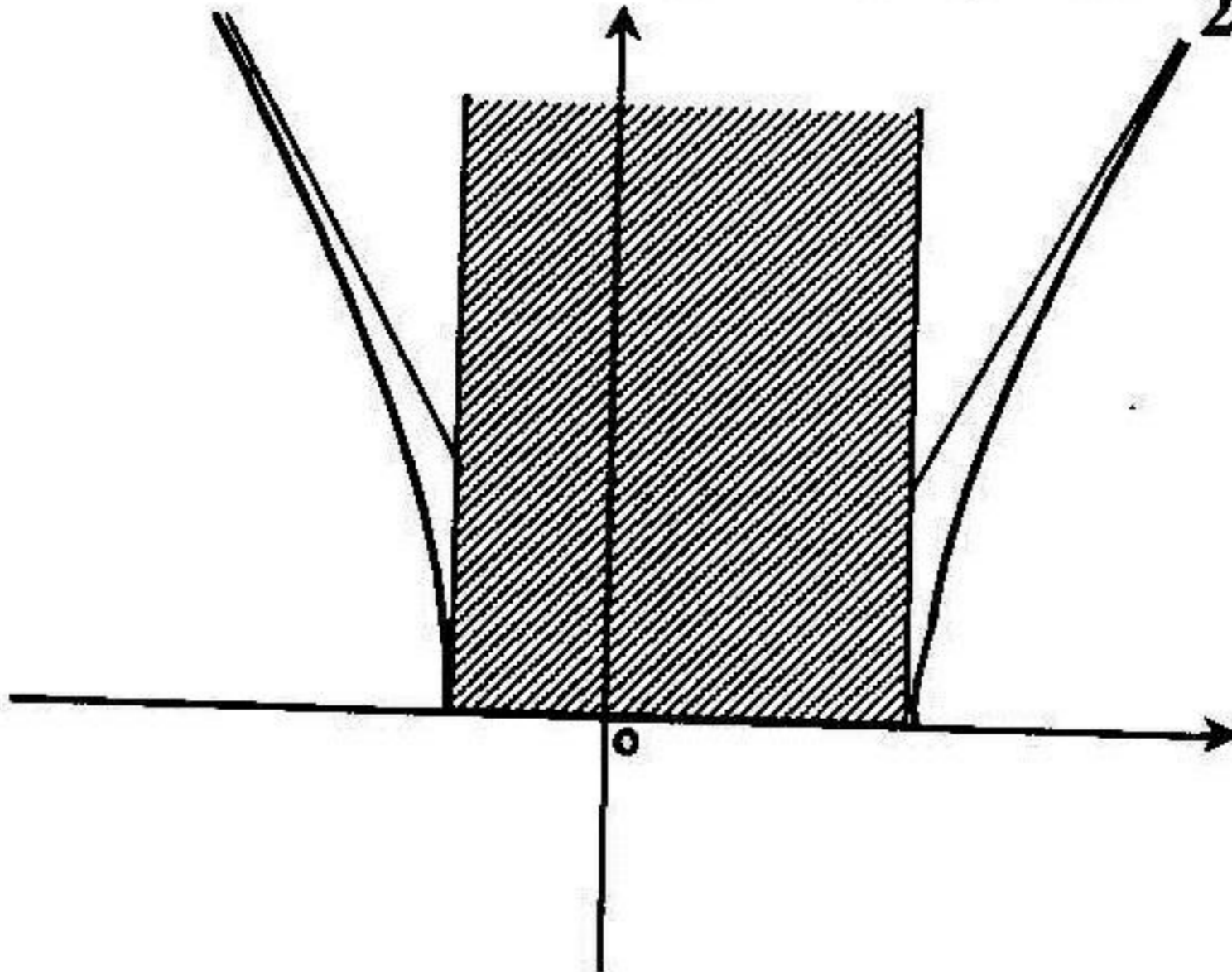
\swarrow 0 \searrow 0

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = -x + \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $y = x - \frac{1}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \quad (5)$$

$$D_f = [-1, 0[\cup]0, 1]$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$x \xrightarrow{<} 0 \quad x \xrightarrow{>} 0$$

$$f'(x) = -\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \quad : x \in D_f \text{ من أجل كل}$$

جدول التغيرات :

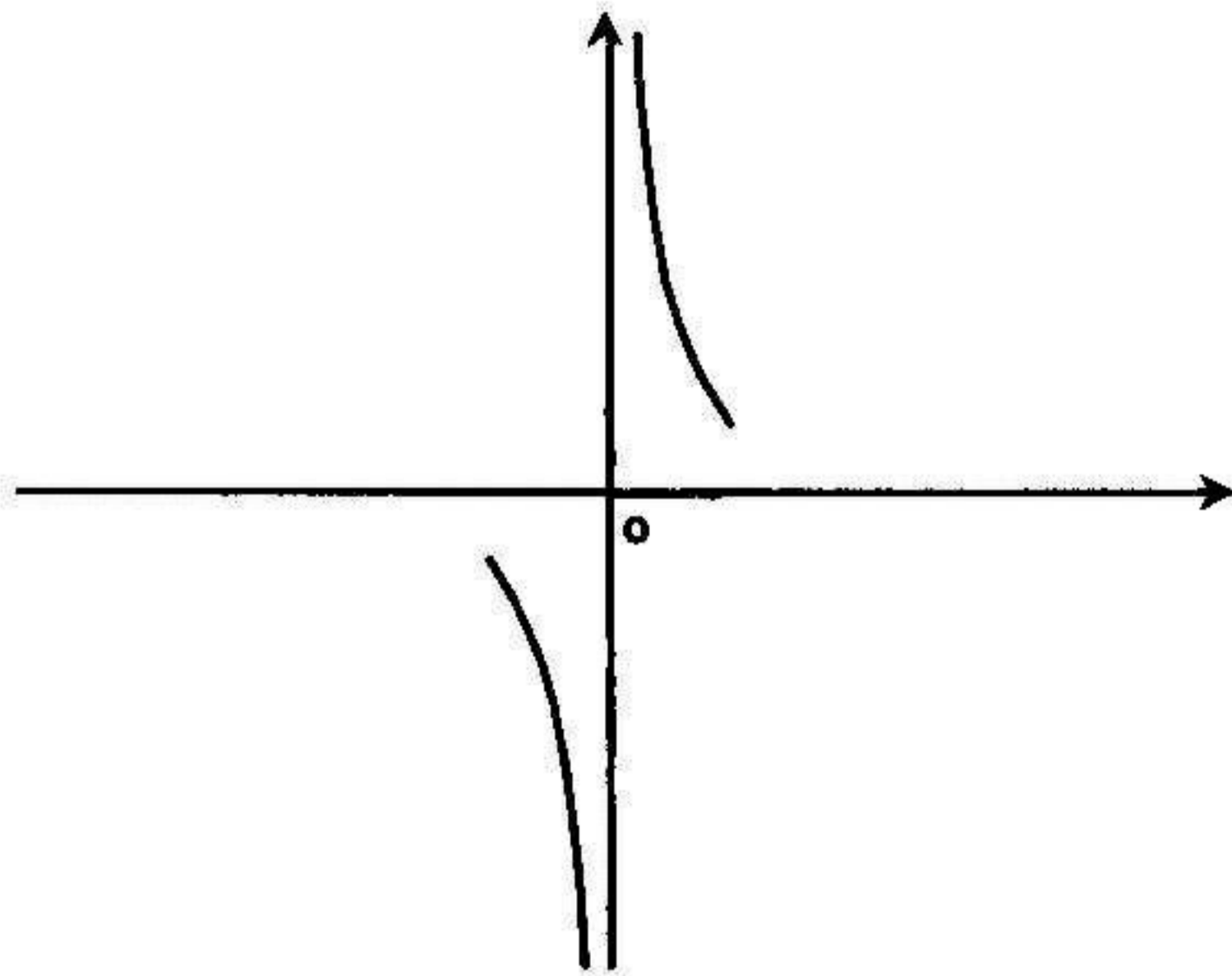
x	-1	0	1
$f'(x)$		-	
$f(x)$	-1		1

$\begin{matrix} \nearrow & \searrow \\ -1 & +\infty \\ & \searrow \\ & -\infty \end{matrix}$

الحدود اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيم مقارب للمنحنى

المنحني :



مسائل محلولة

مسألة 1

I. لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ :

$$f(x) = x - 3 + \sqrt{2(x+1)}$$

ومتجانس . (1- أ) أحسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1/2)$.

(ب) أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل .

(ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (ج) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة

إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$. (3) أنشئ المنحني (c)

4- أ) عين على المجال $[-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \sqrt{2(x+1)}$.

(ب) أحسب المساحة S لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي المحددة

بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلاتها : $x = 0$, $x = \frac{7}{2}$, $y = x$

II. نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي النقطة $M'(x'; y')$

$$\begin{cases} x' = \alpha x + 1 \\ y' = (2\alpha - 1)y + 3 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

(1) عين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابل .

(2) ما طبيعة التحويل T_1 ($\alpha = 1$) وما هي عناصره المميزة ؟

(3) عين معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T_1

الحل

I. (1) حساب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1/2)$

$$f(-1/2) = -5/2 , f(0) = -3 + \sqrt{2} , f(1) = 0$$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f

$$D_f = [-1; +\infty[\quad \text{مجموعة تعريف :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{حساب النهايات :}$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ لدينا:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2(x+1)}} > 0$$

جدول تغيرات :

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-4	$+\infty$

2-1) تعيين نقطة تقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل

(c) يقطع (x'x) معناه $f(x) = 0$ يكافئ $x - 3 + \sqrt{2(x+1)} = 0$ ومنه :

$$\text{ومنّه } \begin{cases} \sqrt{2(x+1)} = 3-x \\ 2(x+1) = (3-x)^2 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \text{ ومنّه}$$

ومنّه $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ $x = 1$ المنحني (c) يقطع (x'x) في النقطة (1; 0)

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-3}{x} + \frac{\sqrt{2(x+1)}}{x} \right] = 1$$

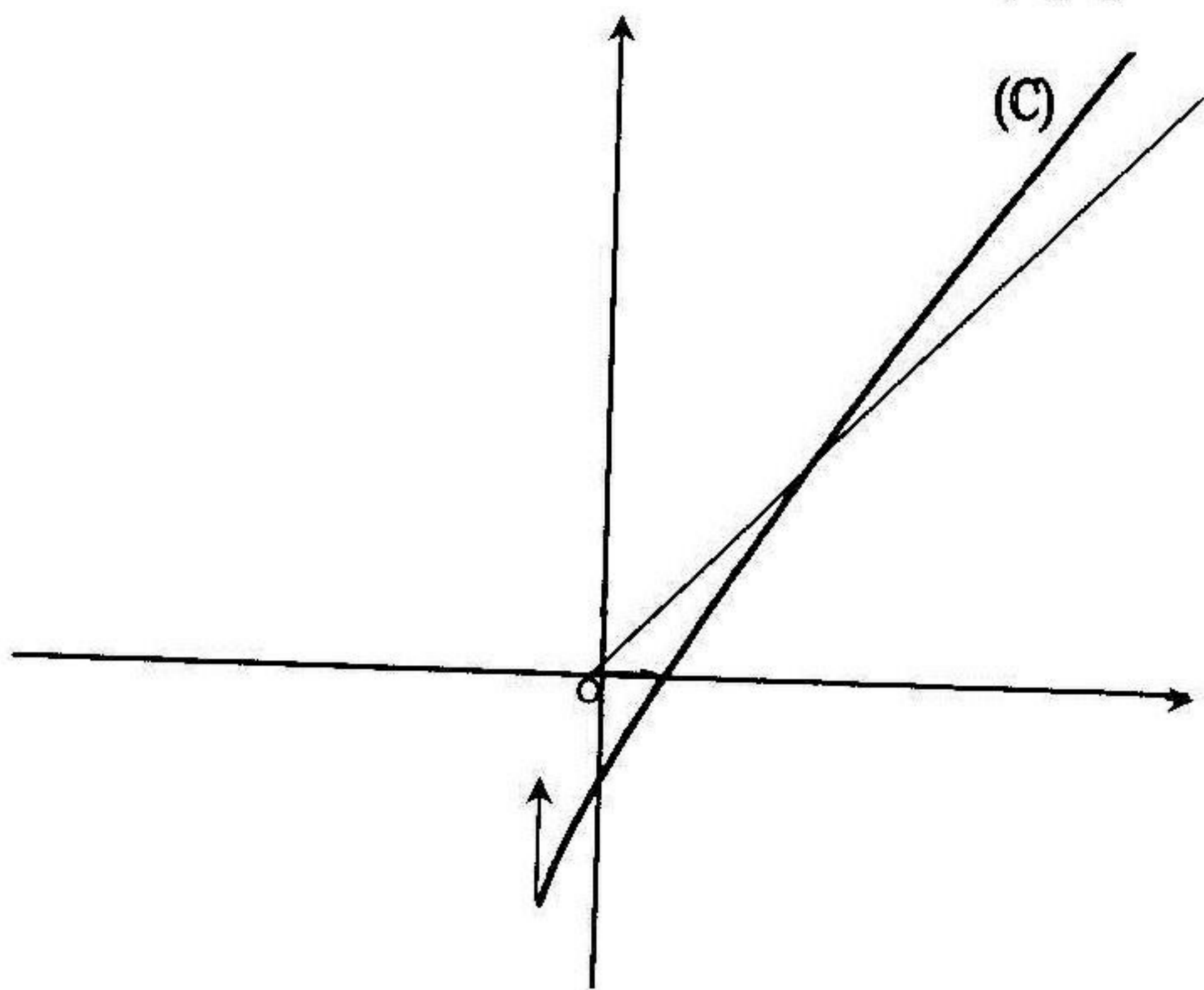
$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2(x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2(x+1)}{x^2}} = 0 \text{ لأن } \right)$$

إذن المنحني (c) يقبل في

حوار $+\infty$ فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

د) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

من أجل $x \in D_f$ لدينا : $f(x) - x = \sqrt{2(x+1)} - 3$
 من أجل $x \in D_f$ فإن $f(x) - x > 0$ يكافئ $\sqrt{2(x+1)} > 3$ ومنه $2(x+1) > 9$
 ومنه $x > \frac{7}{2}$. على المجال $]\frac{7}{2}; +\infty[$ فيكون المنحني (c) فوق المستقيم (Δ)
 من أجل $x \in D_f$ فإن $f(x) - x < 0$ لما $x \in]-1; \frac{7}{2}[$ وبالتالي فيكون المنحني
 (c) تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال .
 (3) إنشاء المنحني (c)



4- أ) تعيين على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \sqrt{2(x+1)}$
 بوضع $u(x) = (x+1)$ ، $u'(x) = 1$ ، $\int \sqrt{2(x+1)} dx = \sqrt{2} \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx$
 ونعلم أن $\int u^n u' du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ ($n \neq -1$)
 ومنه $\int \sqrt{(x+1)} dx = \int u^{\frac{1}{2}} u' du = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + c$

$$\int \sqrt{2(x+1)} dx = \sqrt{2} \int (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C \quad (ii)$$

ب) حساب الساحة المحددة بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها :

$$x=0, x=7/2, y=3$$

$$S = \int_0^{7/2} [x - f(x)] dx = \int_0^{7/2} [3 - \sqrt{2(x+1)}] dx$$

$$= \left[3x - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_0^{7/2} = \left(\frac{3}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \quad (iii)$$

(حيث (u.a) هي وحدة المساحة)

11 (1) تعيين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابل

(1) يكون T_α تقابل إذا كان محدد الجملة غير معدوم ومنه $\alpha(2\alpha-1) \neq 0$ وبالتالي

$$\alpha \neq 0 \text{ و } \alpha \neq \frac{1}{2}$$

(2) طبيعة التحويل $T_1 (\alpha=1)$

التحويل T_1 يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ النقطة $M'(x'; y')$ حيث :

111 $x' = x + 1$ و $y' = y + 3$ نلاحظ أن العبارة التحليلية للتحويل T_1 هي عبارة انسحاب

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T_1

$M' T_1(M)$ ومنه $T_1^{-1}(M') = M$ حيث : $x = x' - 1$ و $y = y' - 3$

لعلم أن معادلة (c) هي $y = x - 3 + \sqrt{2(x+1)}$ وتكون معادلة صورة المنحني (c)

بالتحويل T_1 هي $y' - 3 = x' - 1 - 3 + \sqrt{2x'}$ ومنه $y' = x' - 1 + \sqrt{2x'}$

مسألة 2

لنظهر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$ وليكن (c) تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (أ) عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب) ادرس اشتقاق الدالة f على يسار $x = -1$ وعلى يمين $x = 1$ وفسر هندسيا النتيجة.

2- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب) أدرس تغيرات الدالة f . (ج) استنتج إشارة $f(x)$.

3- (أ) برهن بأن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (c) .

(ب) أدرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة إلى (Δ) .

4 أنشئ المنحنى (c) في المعلم $(O; \bar{i}; \bar{j})$

5 ناقش وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة : $x - \sqrt{x^2 - 1} = m$ ($m \in \mathbb{R}$)

6 لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = |x| - \sqrt{x^2 - 1}$. نسمي (c') الممثل البياني

لها في المعلم السابق . (أ) تحقق بأن الدالة g زوجية . (ب) أنشئ المنحنى (c') في

نفس المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$

الحل

1- (أ) تعيين مجموعة تعريف الدالة f

تكون الدالة f معرفة إذا كان $x^2 - 1 \geq 0$ أي $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ وبالتالي :

$$D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

(ب) دراسة قابلية الاشتقاق الدالة f على يسار $x = -1$ وعلى يمين $x = 1$

- مشتق f على يسار $x = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{(x+1) - \sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \xrightarrow{<} -1} 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\infty \end{aligned}$$

فالدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار $x = -1$ ويكون للمنحنى (c) عند هذه النقطة

نصف مماس يوازي محور الترتيب .

- مشتق الدالة f على يمين $x = 1$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = -\infty$$

فالدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين $x = +1$ ويكون للمنحنى (c) عند هذه النقطة

نصف مماس يوازي محور الترتيب .

1- (أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 0$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف: $D_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

من أجل كل $x \in D_f$ لدينا: $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x^2 - 1} - x$.

لكل $x \in]-\infty; -1]$ فإن $\sqrt{x^2 - 1} - x > 0$ ومنه $f'(x) > 0$ على هذا المجال.
لكل $x \in [1; +\infty[$ فإن:

$$\sqrt{x^2 - 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} < 0$$

ومنه $f'(x) < 0$ من أجل $x \in [1; +\infty[$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$-$
$f(x)$	$-\infty$			0

من جدول تغيرات الدالة f لدينا: $f(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; -1]$

$$x \in [1; +\infty[\text{ من أجل } f(x) > 0$$

3- أ) البرهان على أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [-x - \sqrt{x^2 - 1}] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x - \sqrt{x^2 - 1})(-x + \sqrt{x^2 - 1})}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \end{aligned}$$

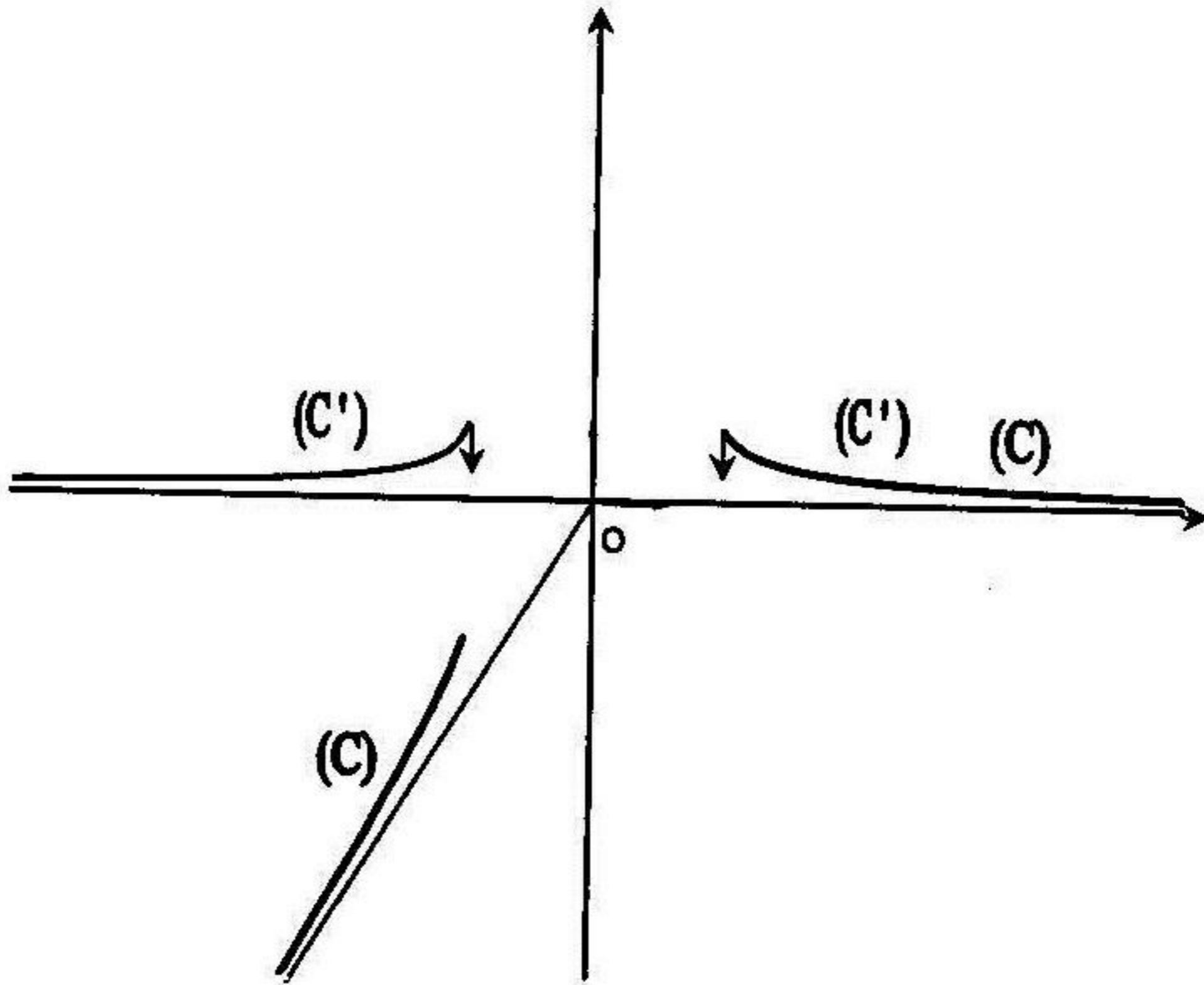
إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$

ب) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

$$f(x) - 2x = -x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} > 0 ; x \in]-\infty; -1]$$

إذن المنحني (c) يكون فوق المستقيم المقارب (Δ)

4) إنشاء المنحني (c)



5) المناقشة بيانياً وحسب قيم الوسيط m لحلول المعادلة $f(x) = m$

من رسم المنحني (c) نلاحظ أن :

- إذا كان $m \in]-\infty; -1]$ ، المعادلة $f(x) = m$ تقبل حل وحيد سالب
 - إذا كان $m \in]0; 1]$ ، المعادلة $f(x) = m$ تقبل حل وحيد موجب
 - إذا كان $m \in]-1; 0] \cup]1; +\infty[$ ، المعادلة $f(x) = m$ ليست لها حلول
- 6- أ) التحقق بأن الدالة g زوجية

$$g(-x) = |-x| - \sqrt{(-x)^2 - 1} = |x| - \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$$

فالدالة g هي دالة زوجية .

- ب) إنشاء المنحني (c') للدالة g
- بما أن الدالة g زوجية فيكون منحنيا البياني متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب .
- على المجال $[0; +\infty[$ لدينا $g(x) = f(x)$ إذن على المجال $[1; +\infty[$ المنحني (c') منطبق على المنحني (c) . على المجال $]-\infty; -1[$ المنحني (c') يناظر بالنسبة إلى محور الترتيب المنحني (c) في المجال $[1; +\infty[$.

مسألة 3

لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

لسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2- أ) أثبت أن النقطة $A(0; 1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (c)

ب) اكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة A .

3) لتكن الدالة h المعرفة كما يلي : $h(x) = f(x) - x$.

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة ، برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حل وحيد

4) أنشئ المنحني (c) . $\alpha \in]1; 2[$

5) احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$x = 0 , x = 2 , y = 0$$

لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. 1) تحقق بأن g هي دالة فردية

الفرح كيف يمكن إنشاء المنحني (Γ) للدالة g باستخدام المنحني (c) .

الحل

I. 1) دراسة تغيرات الدالة f

- مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty; +\infty[$

- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 2$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)} > 0$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	2

2-أ) إثبات أن النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف المنحني

لدينا من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$ ومنه $f''(x) = -\frac{3x}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}$

نلاحظ أن $f''(0) = 0$ و $f''(x)$ يغير إشارته بمرور على 0 ، إذن النقطة ذات

الفاصلة $x = 0$ هي نقطة انعطاف المنحني (c)

ب) معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $A(0;1)$

معادلة المماس للمنحني عند $x = 0$ هي : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$

3) البرهان بأن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1; 2[$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x^2+1}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} < 0$$

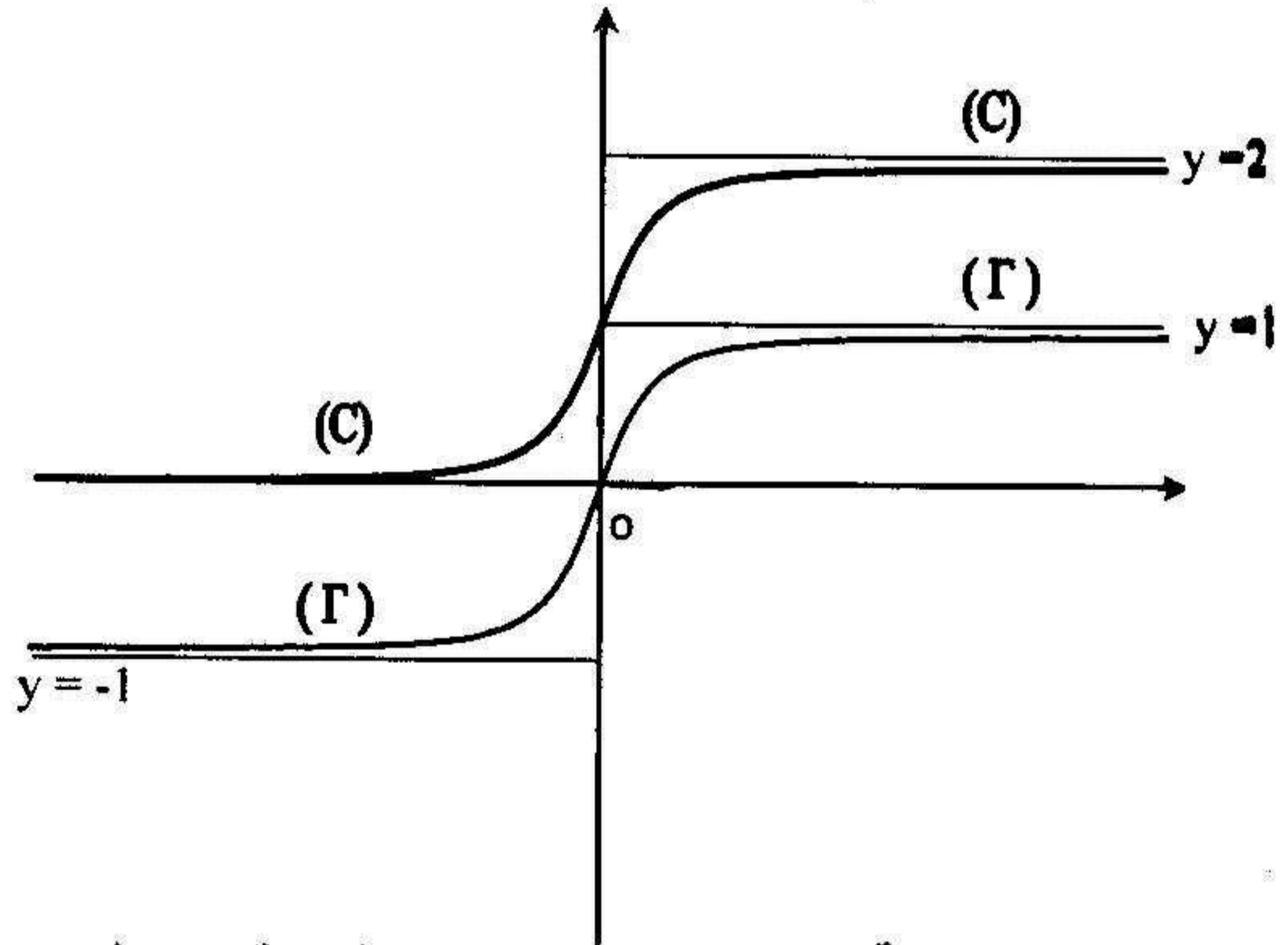
(لأن من أجل كل عدد حقيقي x فإن $(\sqrt{x^2+1}(x^2+1)) > 1$)

الدالة h مستمرة $h(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$, $h(2) = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 1 = -0,105$

ومتناقصة تماما على المجال $[1;2]$ و العدد 0 محصور بين $h(1)$ و $h(2)$ حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1;2[$.

(4) إنشاء المنحني (c)



(5) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها

$$x=0, x=2, y=0$$

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^2 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times x dx \quad \cdot \quad \int_0^2 dx = [x]_0^2$$

بوضع $x^2 + 1 = u(x)$ ومنه $u'(x) = 2x$ ومنه $x = \frac{1}{2}u'(x)$ إذن :

$$\int (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \int u'(x) [u(x)]^{-\frac{1}{2}} dx = [u(x)]^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{x^2 + 1} + c$$

$$S = \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^2 = (2 + \sqrt{5}) - 1 = 1 + \sqrt{5} \text{ (u.a) إذن}$$

.II (1) التحقق بأن الدالة g هي دالة فردية

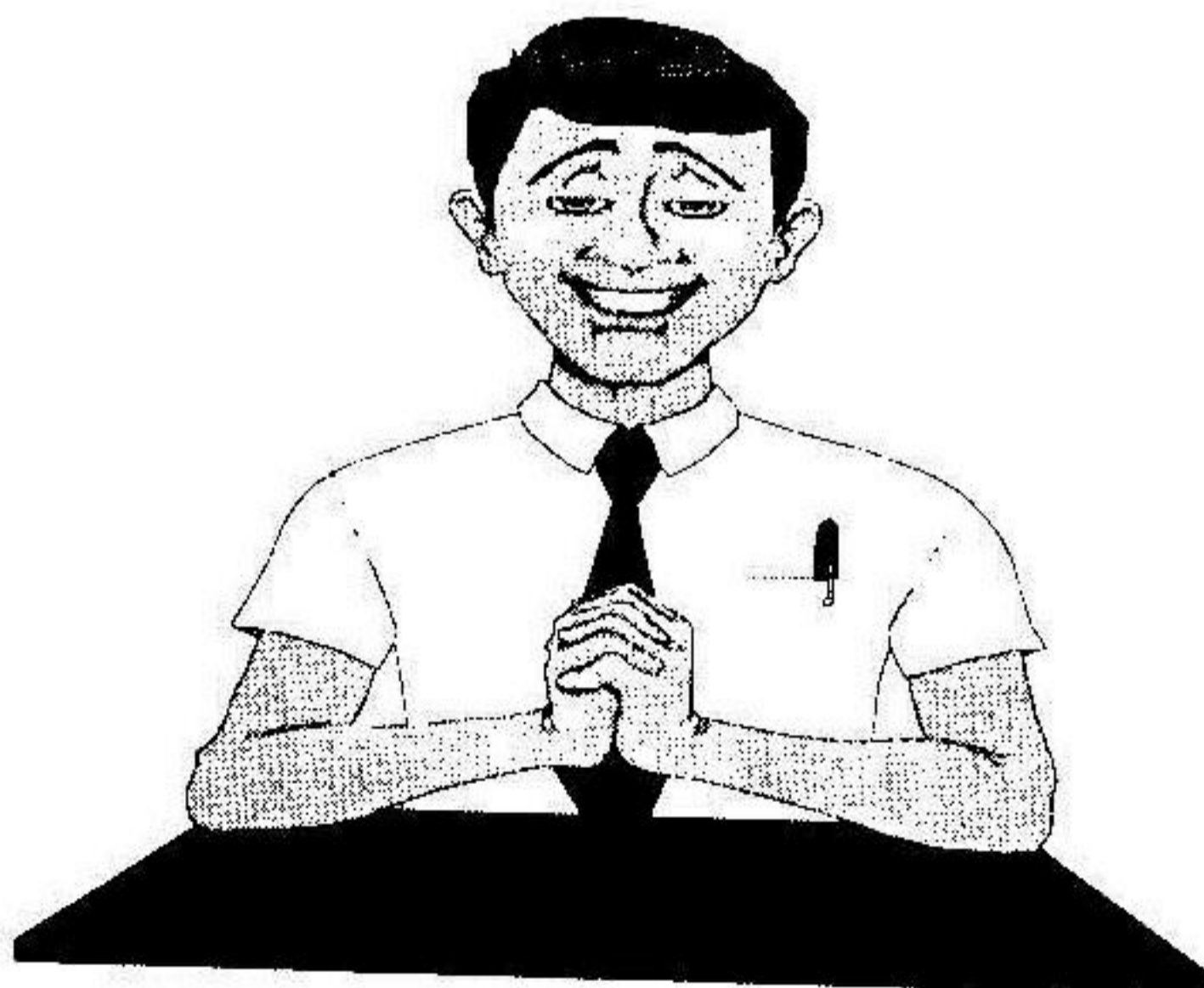
$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ لدينا } g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -g(x) \text{ فالدالة } g$$

هي دالة فردية .

(2) شرح إنشاء المنحني (Γ) باستعمال المنحني (c)

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $g(x) = f(x) - 1$ ، إذن المنحني (Γ) يستنتج من

المنحني (c) بالاتسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.



دوال جذرية مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

$$1) f(x) = x - 2\sqrt{x} \quad , \quad 2) f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5} \quad , \quad 4) f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$$

$$5) f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \quad , \quad 6) f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{1-3x}$$

$$7) f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad 8) f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}}$$

$$9) f(x) = \sqrt{x^2 - 6|x| + 8} \quad , \quad 10) f(x) = 6 - \sqrt{-x^2 + 4x + 1}$$

$$11) f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 + 32} \quad , \quad 12) f(x) = x + 3 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 9}$$

$$13) f(x) = \frac{x\sqrt{3-x}}{3x+1} \quad , \quad 14) f(x) = \frac{x - 4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 9}$$

$$15) f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2 - 4|x| + 3}}$$

مسائل مقترحة للحل

مسألة 1

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}$ و (Γ) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس . (1) ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج

ان : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$. (2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (Γ) .

(3) - (أ) احسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$. (ب) ارسم المنحنى (Γ) .

(4) لتكن الدالة g المعرفة بـ $g(x) = 1 - |x| + \sqrt{x^2 + |x| + 1}$ وليكن (c) تمثيلها

البياني . (أ) ادرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x = 0$.

(ب) باستعمال المنحنى (Γ) اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (c)

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ وليكن (c) منحنىها البياني .

(1) اكتب عبارة $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة . (2) ادرس اشتقاق واستمرارية

الدالة f عند النقطتين $x_0 = 0$ و $x_1 = 5$ ما ذا نستنتج ؟ (3) ادرس تغيرات الدالة f

(4) - (أ) برهن بأن المستقيم ذو المعادلة: $x = 3$ هو محور تناظر للمنحنى (c)

(ب) برهن بأن المستقيمان اللذان معادلتهما $y = x - 3$ و $y = -x + 3$ هما مستقيمان

مقاربان للمنحنى (c) . (5) عين إحداثيات نقاط التقاطع للمنحنى (c) مع المستقيمين

المقاربين . (6) أنشئ المنحنى (c)

مسألة 3

لعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = -x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ وليكن (c) منحنياً .

(1-أ) عين مجموعة التعريف الدالة f . (ب) ادرس قابلية الاشتقاق الدالة f على

يسار $x = 0$. (2) أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$ وتحقق أن : $f'(x) > 0$

(3) أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف وأعطي جدول التغيرات الدالة f

(4-أ) ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$

(ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (ج) عين نقاط التقاطع (c) مع المحورين

(5) أرسم المنحني (c)

مسألة 4

لعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 4}$ وليكن (c) منحنياً

البياني في معلم متعامد ومتجانس . (1) عين مجموعة التعريف الدالة f وبين أنها زوجية

(2) ادرس اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 2$ وعلى يسار $x_0 = -2$ وفسر هندسيا النتيجة

(3) ادرس تغيرات الدالة f . (4) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c)

(5) اشرح المنحني (c) .

(6) ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة : $f(x) = m$

الدوال المثلثية

- لدراسة الدوال المثلثية يجب الانتباه إلى ما يلي :
- إذا كانت الدالة دورية يكون مجال دراستها في دور واحد للدالة
 - إذا كانت زوجية أو فردية تختصر دراستها على نصف مجال للدراسة

أمثلة على دراسة الدوال المثلثية

مثال 1 :

أدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

1) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

2) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$

3) $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x - 1$

4) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

الحل

1) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

مجموعة التعريف:

الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[-\pi, \pi]$
الدالة f زوجية لأن $f(-x) = f(x)$ إذن فتكون دراسة الدالة f على نصف مجال

أي : $[0, \pi]$

حساب المشتق : من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا :

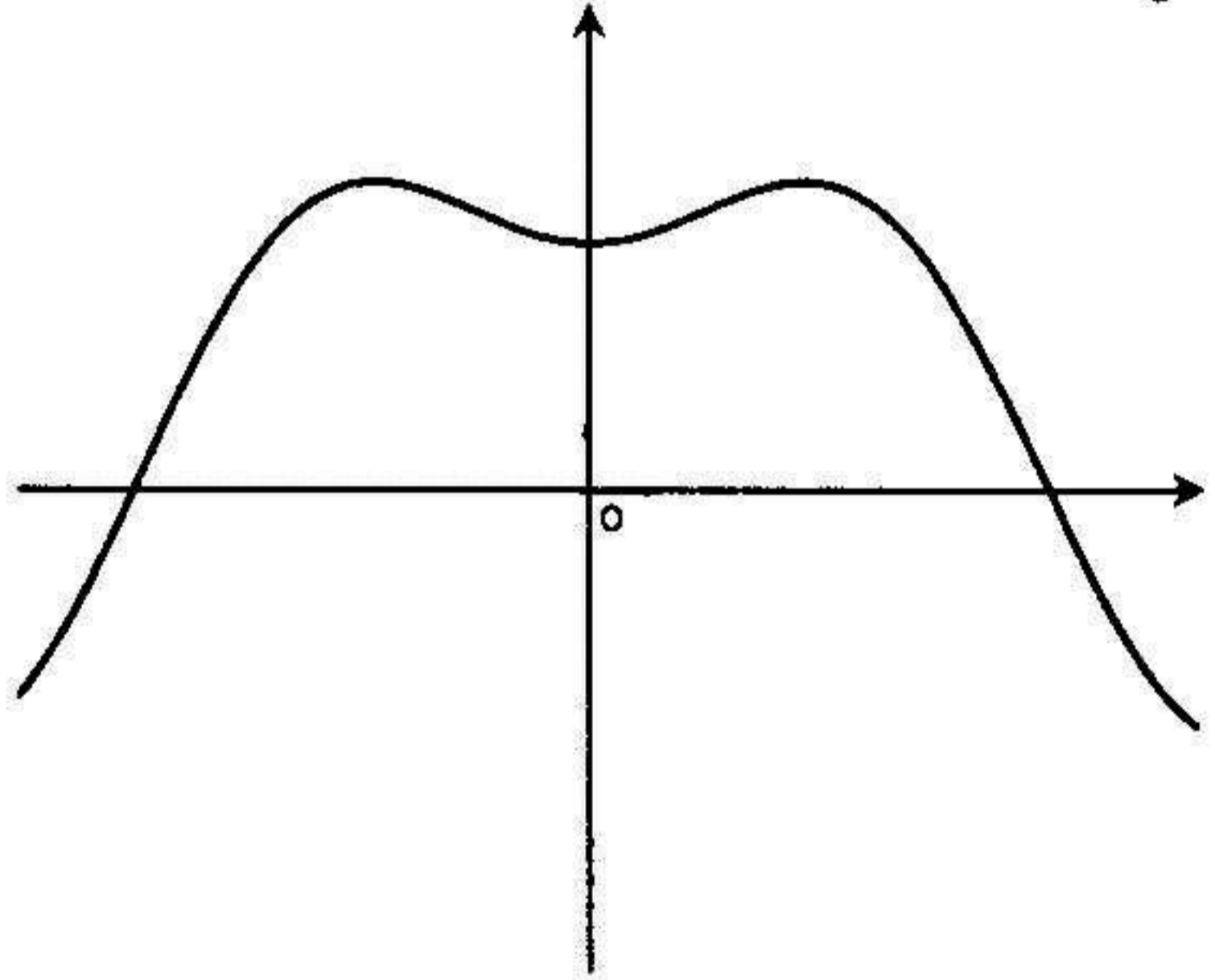
$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1)$$

أشارة $f'(x)$ هي من إشارة $2 \cos x - 1$ لأن $\sin x \geq 0$ على المجال $[0, \pi]$

جدول التغيرات :

x	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	○	+	○
$f(x)$	1	$5/4$	-1

المنحني :



$$2) f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة اذا كان $\cos 2x \neq 0$ و منه $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ و بما ان الدالة f دورية و دورها π و فردية لأن: $f(-x) = -f(x)$ و بالتالي دراستها تكون مقتصرة على

المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و هي معرفة من أجل كل x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow \pi/4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow \pi/4$$

حساب المشتق : لكل x من المجال $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{2 \cos 2x (\cos^2 2x + 2 \sin^2 2x)}{\cos^4 2x}$$

أشارة $f'(x)$ هي من إشارة $\cos 2x$

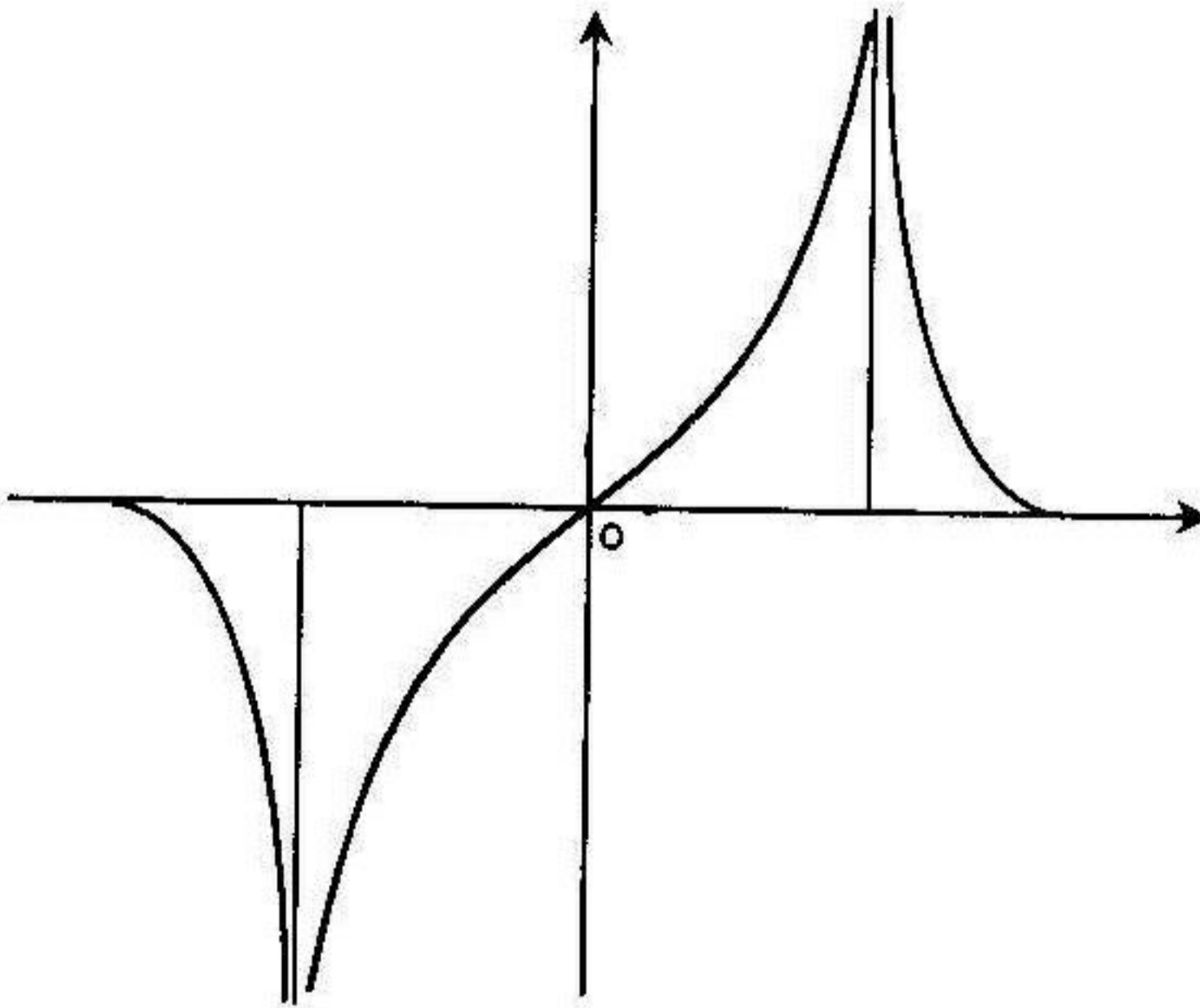
$$\cos 2x > 0 \text{ و منه } 0 < 2x < \frac{\pi}{2} \text{ و منه } 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x < 0 \text{ و منه } \frac{\pi}{2} < 2x < \pi \text{ و منه } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

جدول التغيرات :

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$+\infty$	0

المنحني :



$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x - 1$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[\text{ مجموعة التعريف : }$$

الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[-\pi, \pi]$
 الدالة f زوجية لأن $f(-x) = f(x)$ إذن فتكون دراسة الدالة f على نصف مجال
 أي: $[0, \pi]$

حساب المشتق: من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا:

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x$$

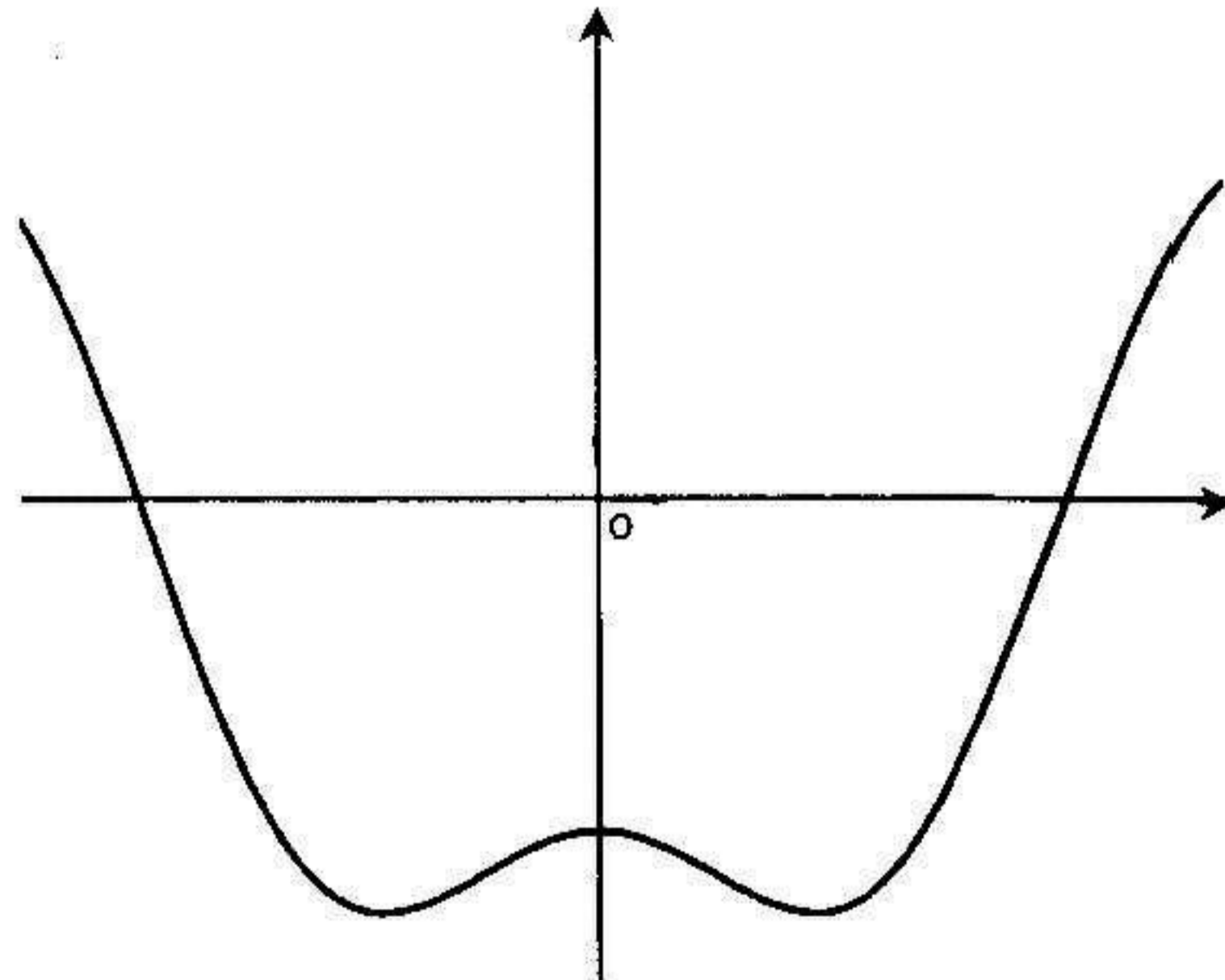
$$= -4 \sin x \cos x + 2 \sin x = -2 \sin x (2 \cos x - 1)$$

من أجل كل x من $[0, \pi]$ فإن: $-2 \sin x < 0$ ، إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة
 $-(2 \cos x - 1)$

جدول التغيرات:

x	0	$\pi/6$	π
$f'(x)$		○	+
$f(x)$	-2	$f(\pi/6)$	2

المنحني:



4) $f(x) = \sin x + |\sin x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f دورية و دورها 2π و بالتالي مجال دراستها يكون $[0, 2\pi]$

من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا $\sin x \geq 0$ و منه $f(x) = 2 \sin x$

و على المجال $[\pi, 2\pi]$ لدينا $\sin x \leq 0$ و منه $f(x) = \sin x - \sin x = 0$

حساب المشتق:

$$f'(x) = 2 \cos x$$

من أجل كل x من $[0, \pi]$ لدينا :

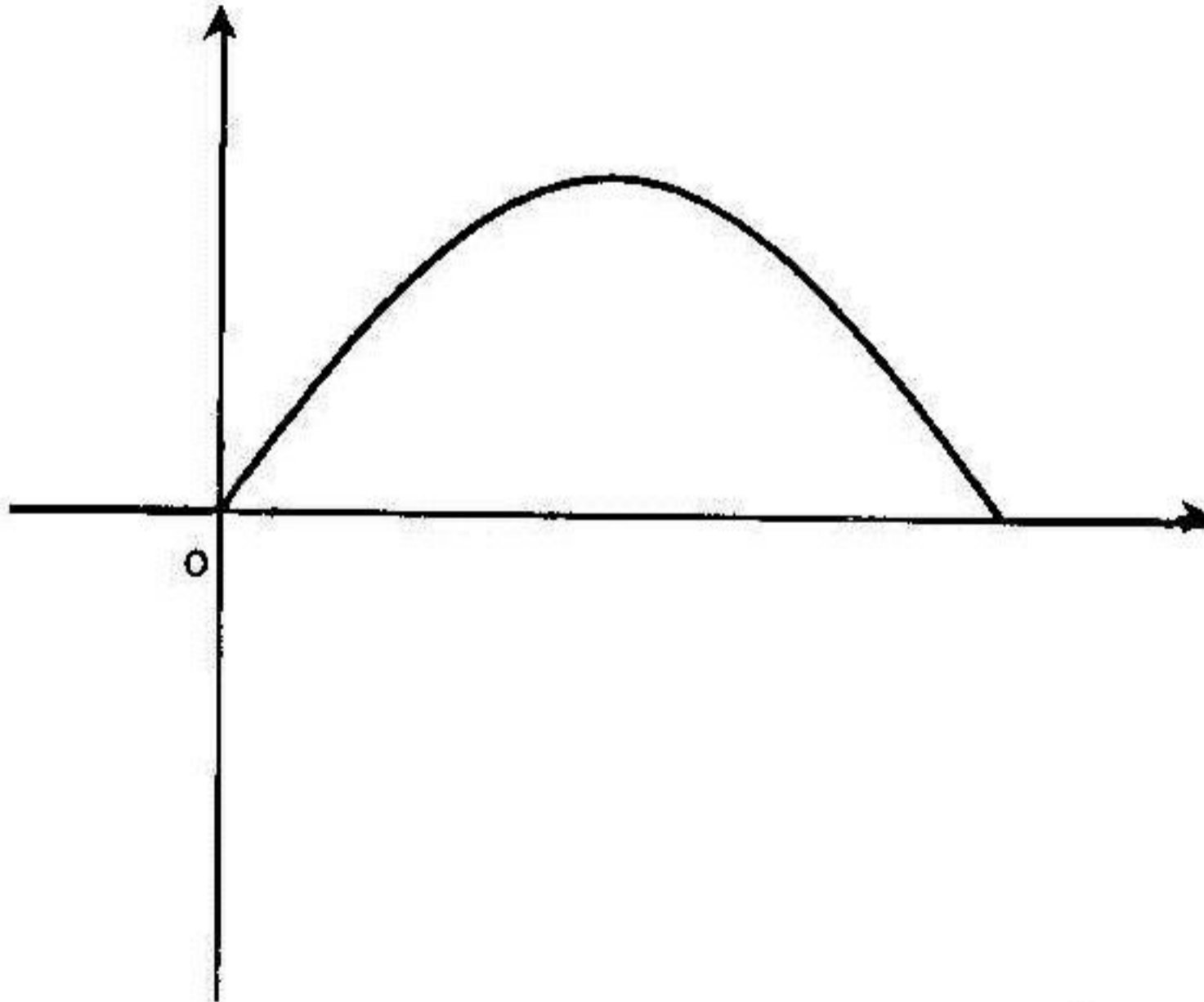
$$f'(x) = 0$$

من أجل كل x من $[\pi, 2\pi]$ لدينا:

جدول التغيرات:

x	0	$\pi/2$	π
$f'(x)$	○	+	○
$f(x)$	0	2	0

المنحني:



مثال 2
 f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ f(0) = 0 \end{cases}, x \in]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$$

- (a) اثبت أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$
 (b) ادرس قابلية الاشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$
 (c) بين أن الدالة f فردية ثم ادرس تغيراتها
 (d) ارسم المنحني (c)

الحل

أ. إثبات أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = 0$$

إذن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

ب. دراسة قابلية الاشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{2x \sin(x/2) \cos(x/2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x \cos(x/2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{2 \times (x/2)} \times \frac{1}{\cos(x/2)} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$

ج. إثبات أن الدالة f فردية:

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{\sin(-x)} = -\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = -f(x)$$

دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف:

بما أن الدالة f فردية و بالتالي دراستها تكون مقتصرة على نصف المجال أي $[0, \pi[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow \pi^-$$

حساب المشتق :

من أجل كل x من $[0, \pi[$ لدينا :

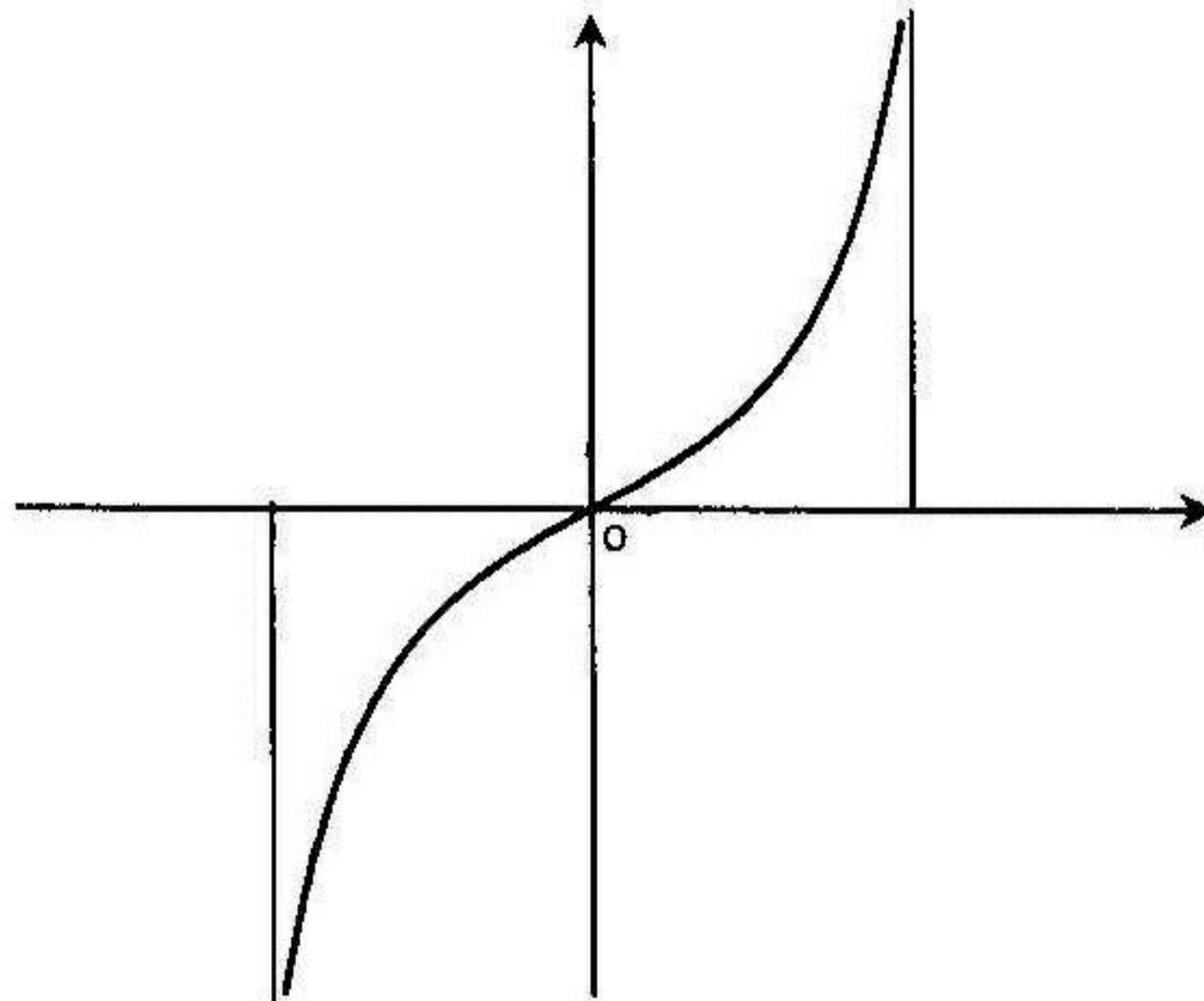
$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - \cos x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \geq 0$$

جدول التغيرات :

x	0	π
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

المنحني



دوال مثلثية مقترحة للدراسة

ادرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال التالية :

$$1) f(x) = 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 2$$

$$2) f(x) = \cos x + \cos^2 x$$

$$3) f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$$

$$4) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$5) f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

$$6) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$7) f(x) = \cos x + x \sin x$$

$$8) f(x) = \frac{1 + 2 \sin x}{1 - \cos x}$$

$$9) f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$$

$$10) f(x) = \frac{\sqrt{2} \sin x}{2 \cos^2 x} + 1$$



الدوال الأسية

الدوال الأسية ذات الأساس e

تعريف: الدالة f التي هي معرفة وقابلة الاشتقاق على \mathbb{R} وتحقق الشرطين الآتيين:

$f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ تسمى: "الدالة الأسية" ونرمز لها بـ: $\exp(x)$

أو بالكتابة المبسطة e^x (تقرأ: أسية x)

الخواص الأساسية للدالة الأسية

من أجل كل عددين حقيقيين x, y ومن أجل كل عدد صحيح

$$* e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad * e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad * e^{nx} = (e^x)^n$$

$$* x > 0 \text{ يكافئ } e^x > 1, \quad * x < 0 \text{ يكافئ } e^x < 1, \quad * e^x = e^y \text{ يكافئ } x = y$$

$$* x > y \text{ يكافئ } e^x > e^y, \quad * x < y \text{ يكافئ } e^x < e^y, \quad * e^0 = 1$$

دراسة الدالة الأسية

الاشتقاق:

الدالة $e^x \rightarrow x$ قابلة الاشتقاق على \mathbb{R} و $(e^x)' = e^x$. بصفة عامة إذا كانت الدالة u

$$\text{قابلة الاشتقاق على } D \text{ فإن من أجل كل } x \in D : [e^{u(x)}]' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

النهايات

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad * \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0, \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$* \lim_{u(x) \rightarrow -\infty} e^{u(x)} = 0, \quad * \lim_{u(x) \rightarrow -\infty} u(x) \times e^{u(x)} = 0, \quad * \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} e^{u(x)} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$* \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \frac{e^{u(x)}}{u(x)} = +\infty, \quad * \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$$

ملاحظات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha \times e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty : \text{فإن } \alpha \in \mathbb{Q}^+ \text{ من أجل كل } -1$$

$$e^{\ln u(x)} = u(x), \quad \ln e^{u(x)} = u(x) \quad -2$$

الدوال الأسية ذات الأساس a حيث $(a > 0, a \neq 1)$

تعريف

« عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن العدد 1

لسمى الدالة الأسية ذات الأساس a الدالة $x \rightarrow a^x$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : a^x = e^{x \ln a}$$

ملاحظات

1- لدراسة الدالة $x \rightarrow a^x$ نحولها إلى الدالة ذات الأساس e ($x \rightarrow e^{x \ln a}$) ثم ندرسها

2- الدالة $x \rightarrow a^x$ لها نفس الخواص كالدالة $x \rightarrow e^x$

3- إذا كان $a > 1$ فإن $x > y \Leftrightarrow e^x > e^y$

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن $x > y \Leftrightarrow e^x < e^y$

أمثلة على دراسة الدوال الأسية

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$f(x) = (x+1)e^{-x+1} + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = (2x^2 + x + 1)e^x \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{2e^x}{1 - e^{2x}} \quad (3)$$

$$f(x) = e^x + 1 - \frac{3}{e^x - 1} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 2} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} + \frac{5}{3} \quad (8)$$

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \quad (7)$$

$$f(x) = (x-2)e^x + xe^{-x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} \quad (9)$$

$$f(x) = 2^x + 3e^x - 2 \quad (12)$$

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (11)$$

الحل

$$f(x) = (x+1)e^{-x+1} + 1 \quad (1)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = -xe^{-x+1}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

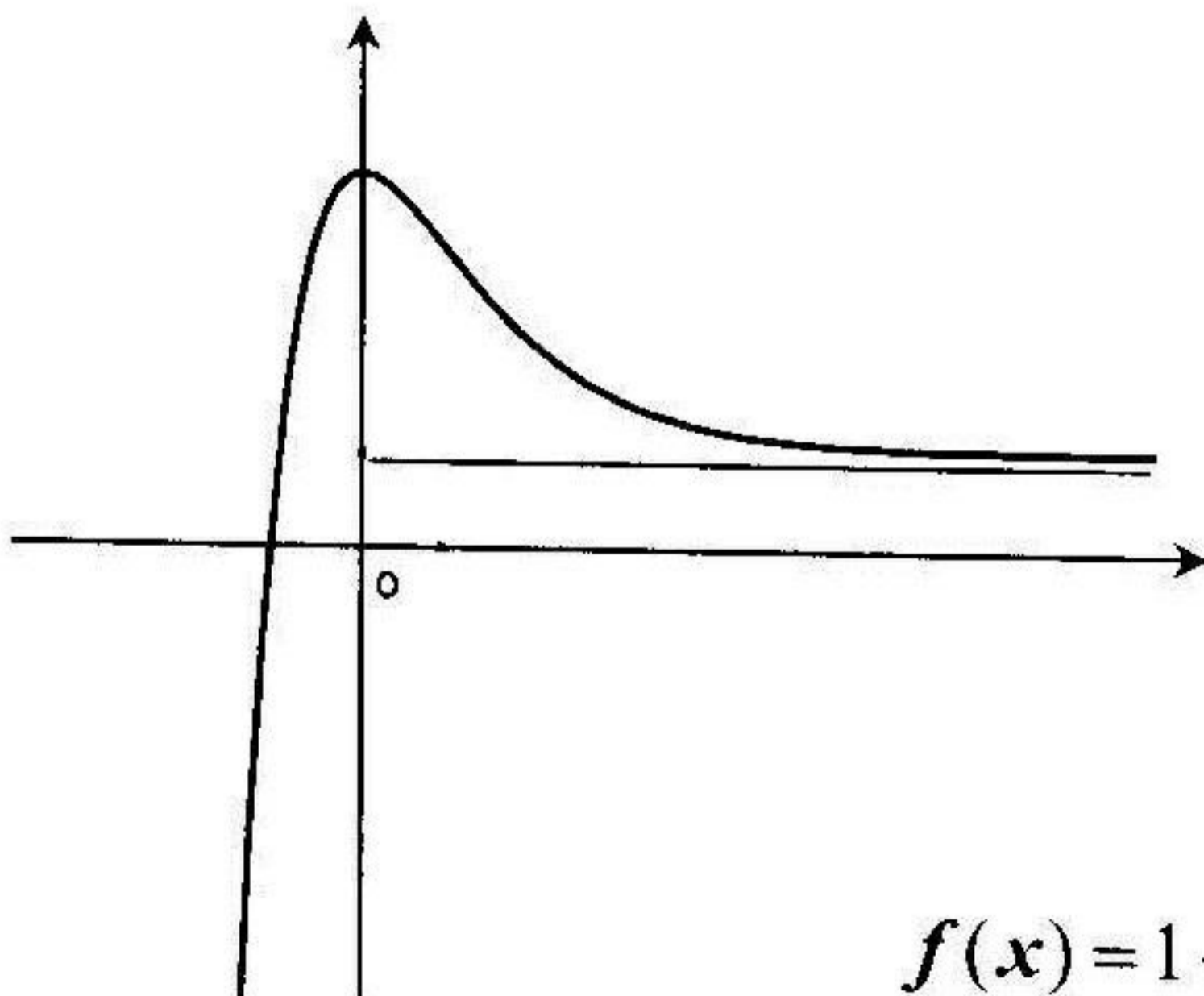
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$e+1$	1

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$.

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب في جوار $(-\infty)$.

المنحنى :



$$f(x) = 1 - x^2 e^{-x} \quad (2)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$f'(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

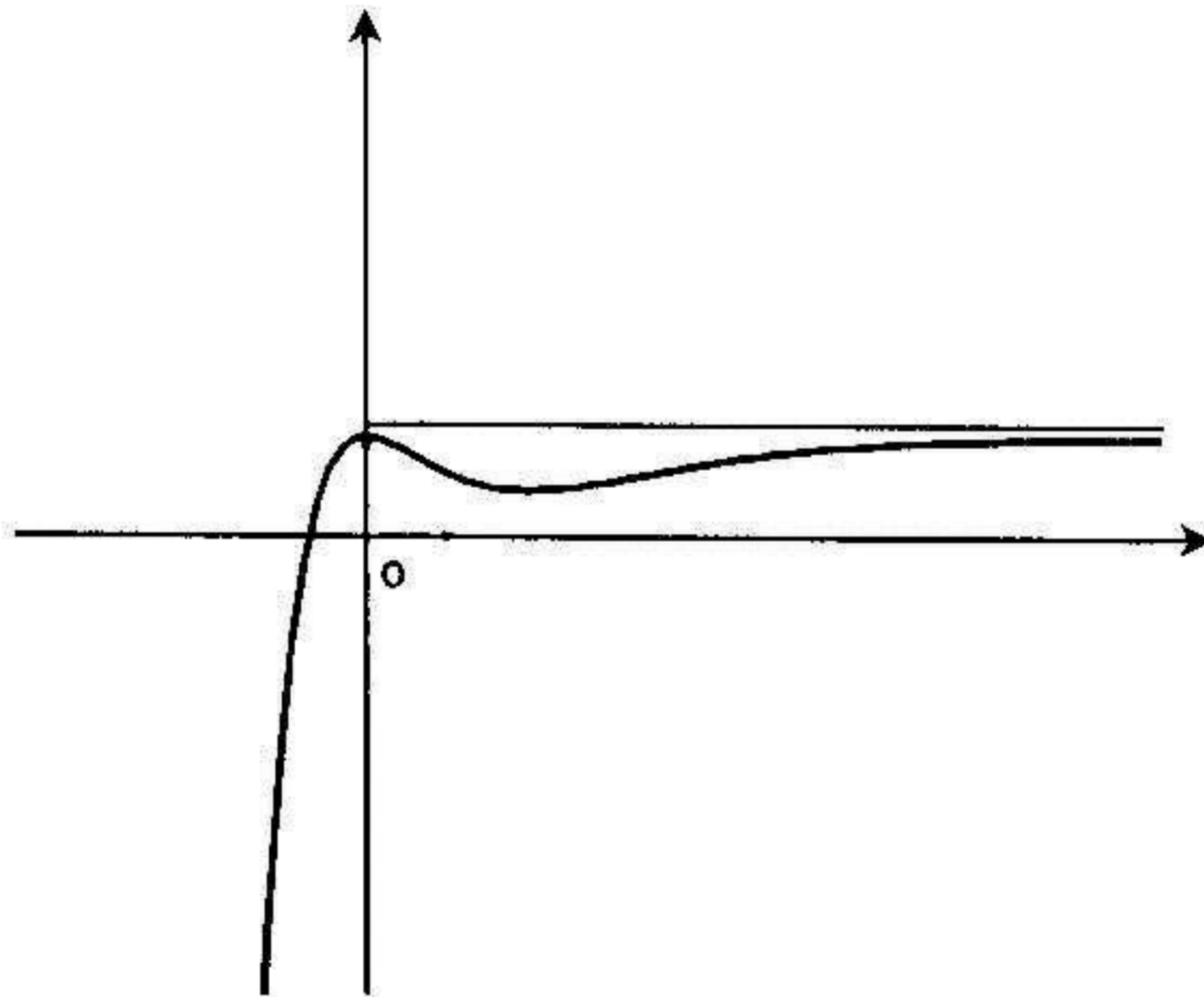
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	\circ	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(2)$	1	

الفروع الانتهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$.
- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب في جوار $(-\infty)$.

المنحنى :



$$f(x) = \frac{2e^x}{1 - e^{2x}} \quad (3)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2(1+e^{2x})e^x}{(1-e^{2x})^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

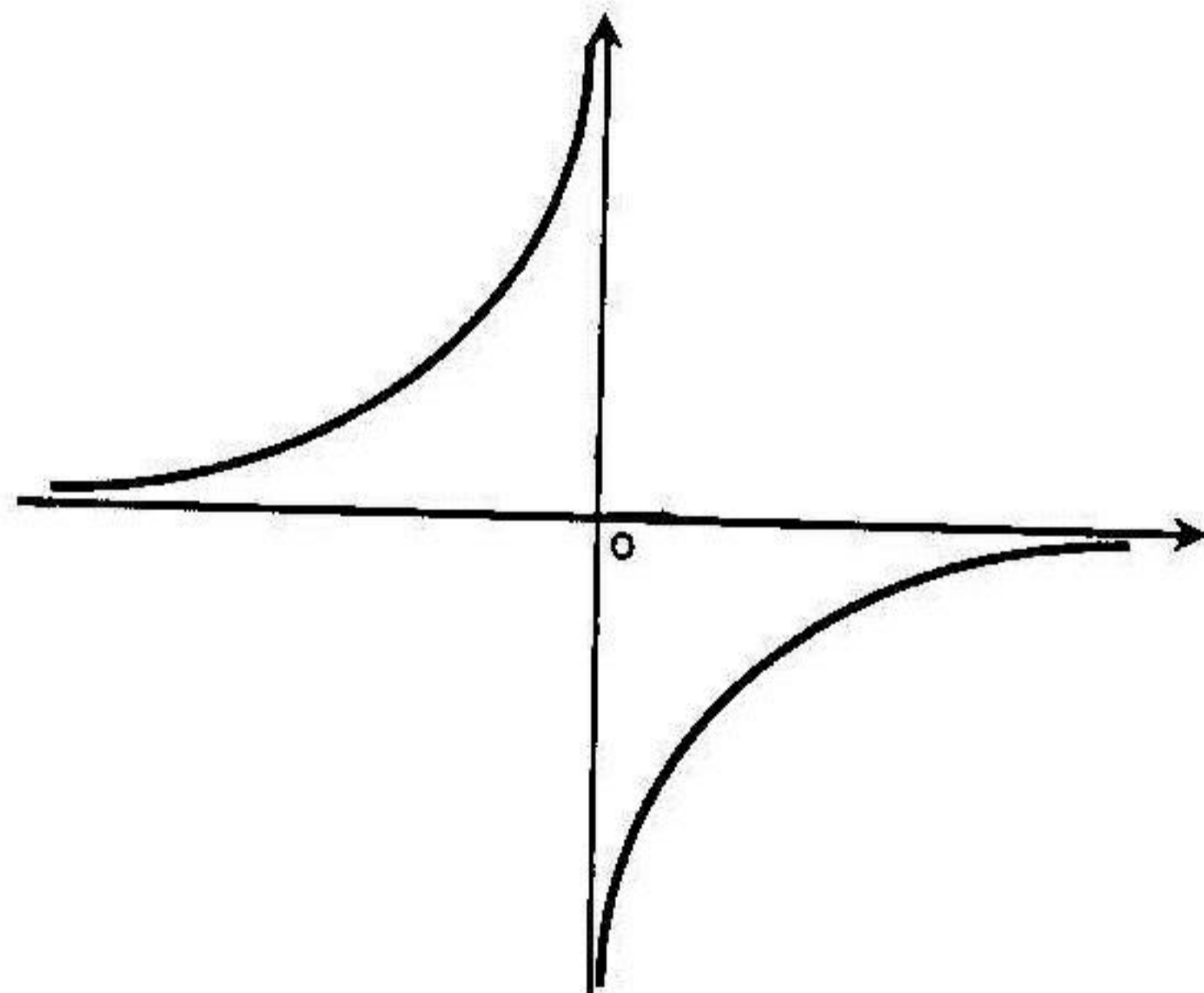
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow 0$

جدول التغيرات :

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

المنحني :



$$f(x) = (2x^2 + x + 1)e^x \quad (4)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = (2x^2 + 5x + 2)e^{-x}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

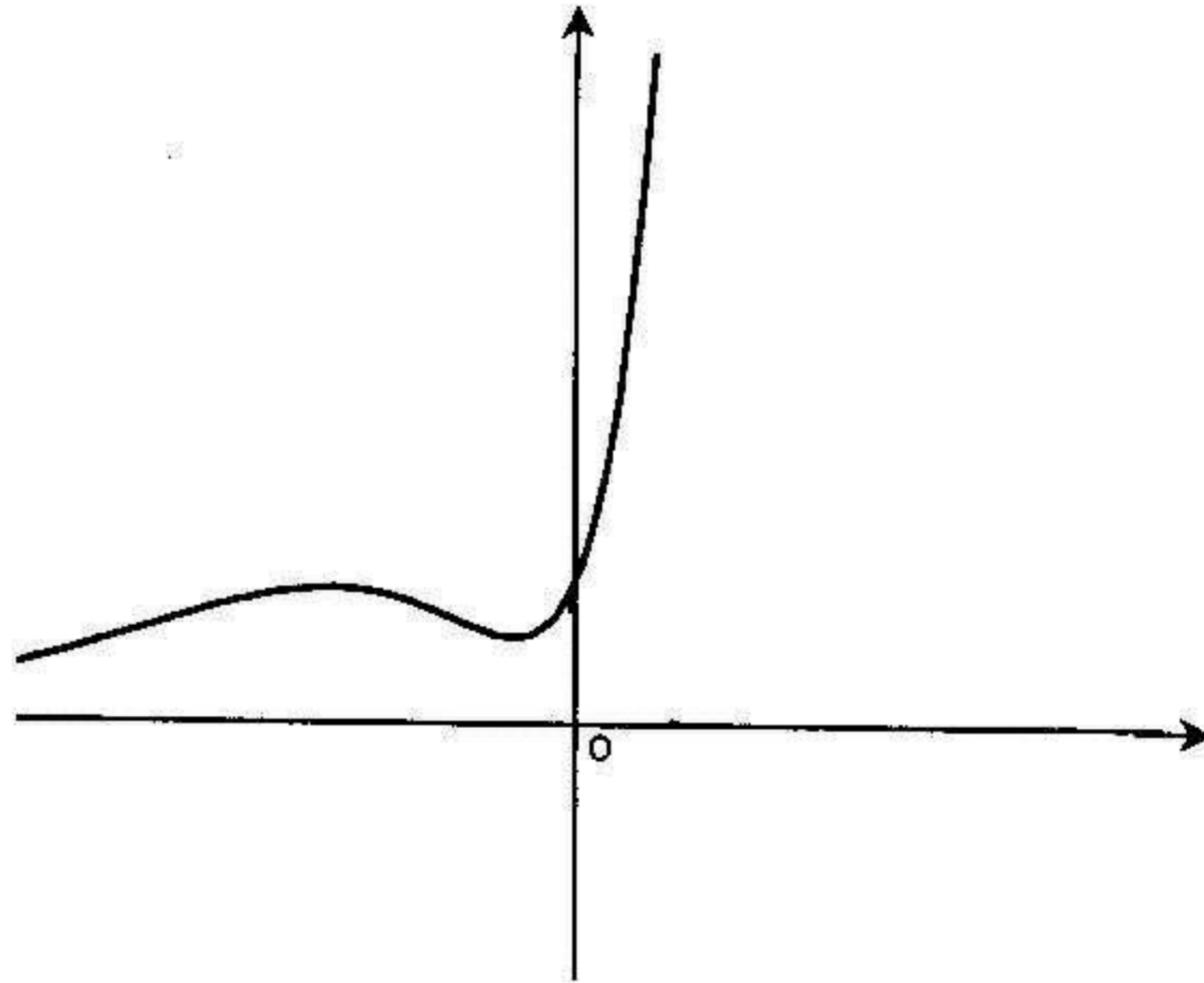
x	$-\infty$	-2		$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	0	$7/e^2$		$1/\sqrt{e}$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$.

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب في جوار $(+\infty)$.

المنحنى :



$$f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 2} \quad (5)$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

$$f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 2)^2}$$

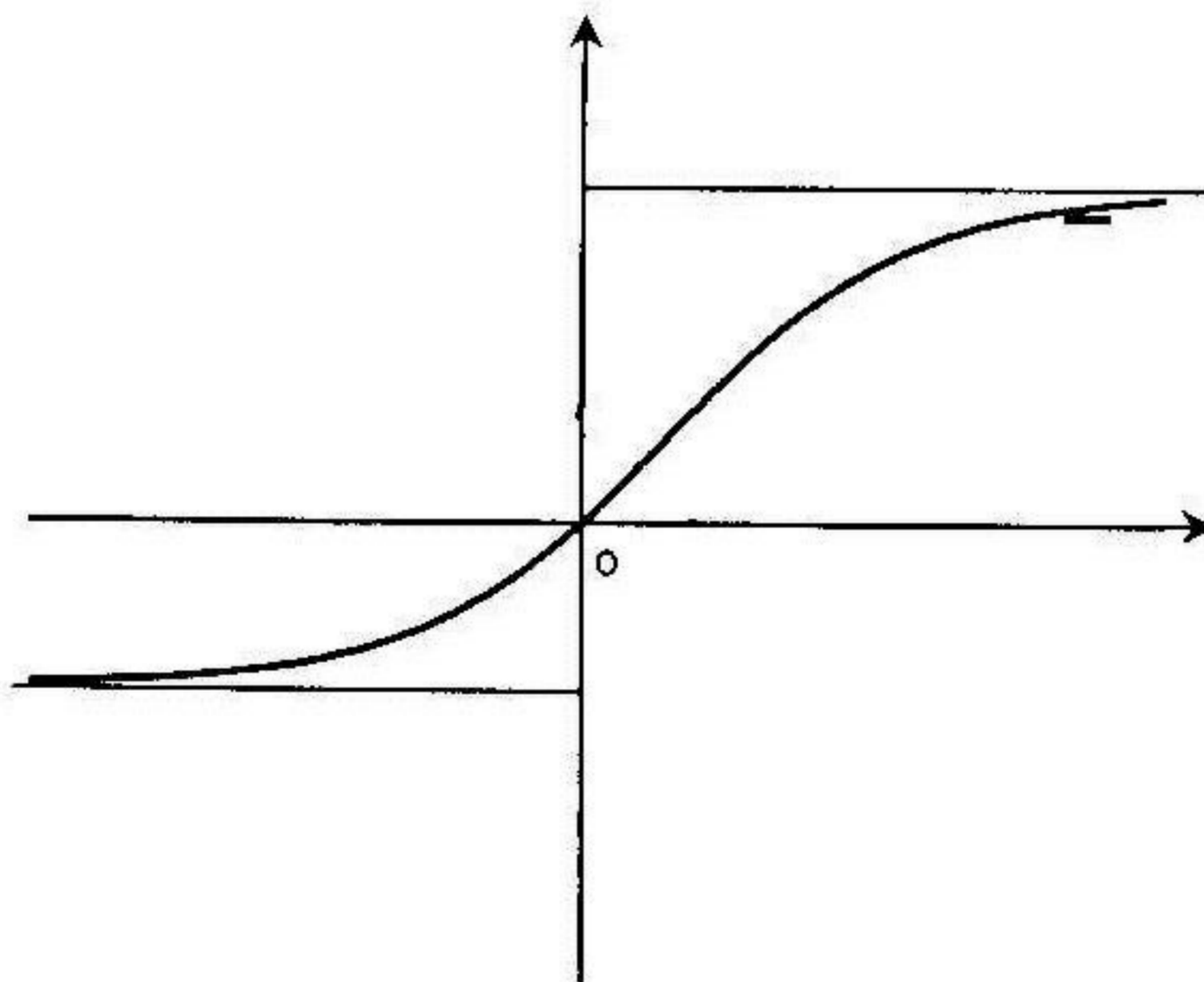
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	2

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$.

المنحني :



$$f(x) = e^x + 1 - \frac{3}{e^x - 1} \quad (1)$$

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{3}{(e^x + 1)^2} \right) e^x \quad : x \in D_f \text{ من أجل كل}$$

حساب المشتق :

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$4 \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

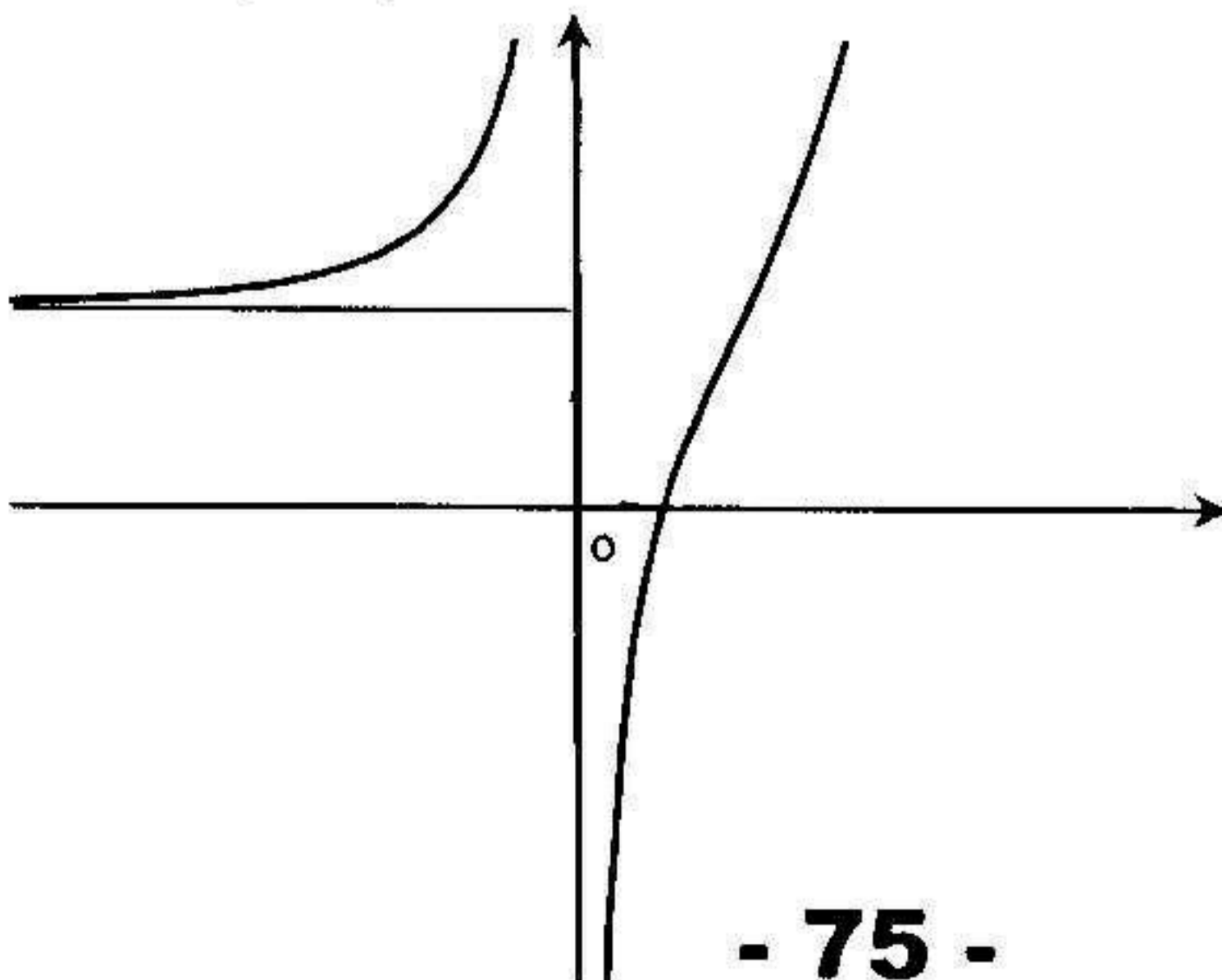
الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 4$ هو مستقيم مقارب في جوار $(-\infty)$

- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = 2x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \quad (7)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2(e^{2x} + e^x + 1)}{(e^x + 1)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

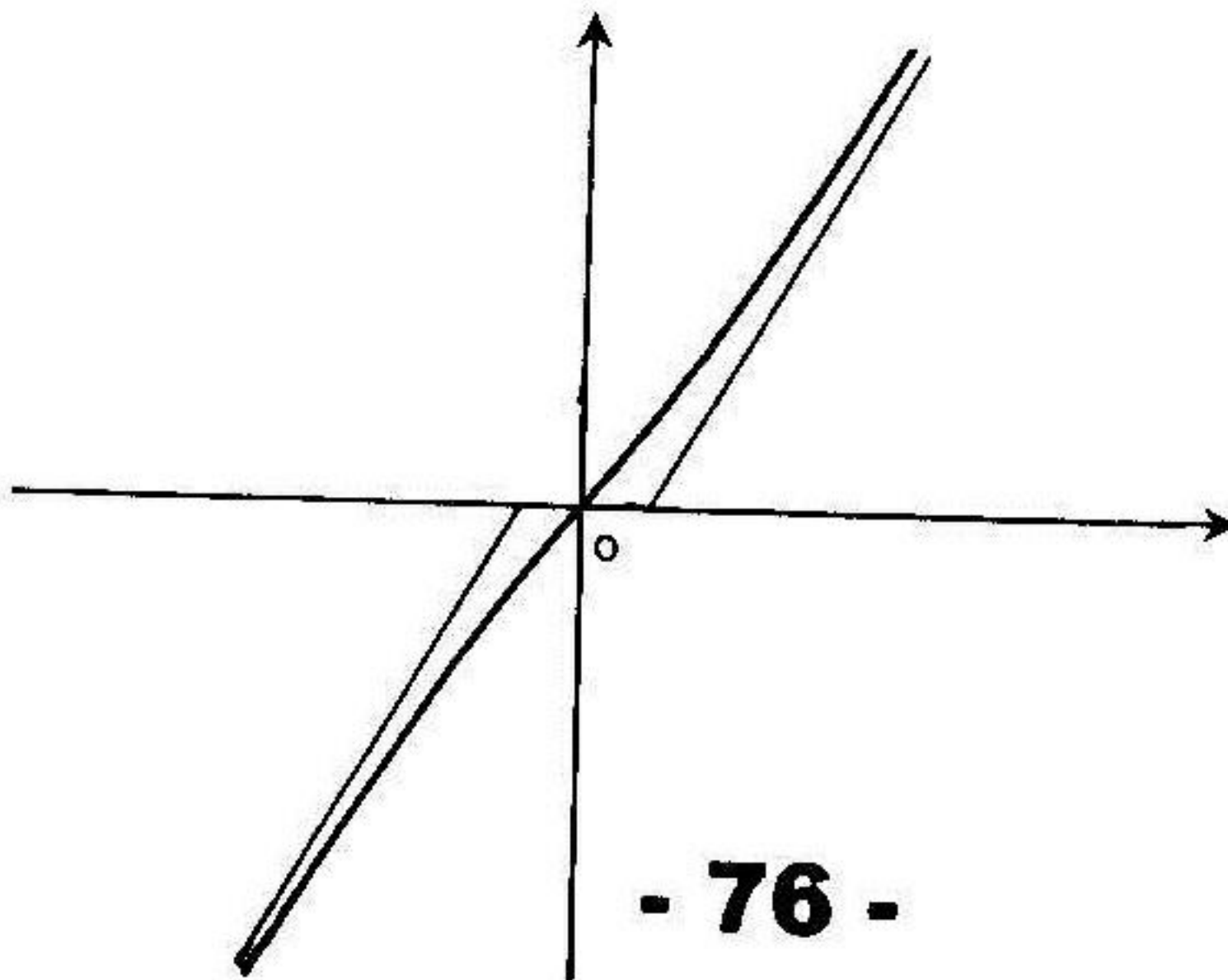
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$.
- المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$.

المنحنى :



$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e^x + 1} \quad (8)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب النهايات :

$$f'(x) = \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + e^x + 1)^2}$$

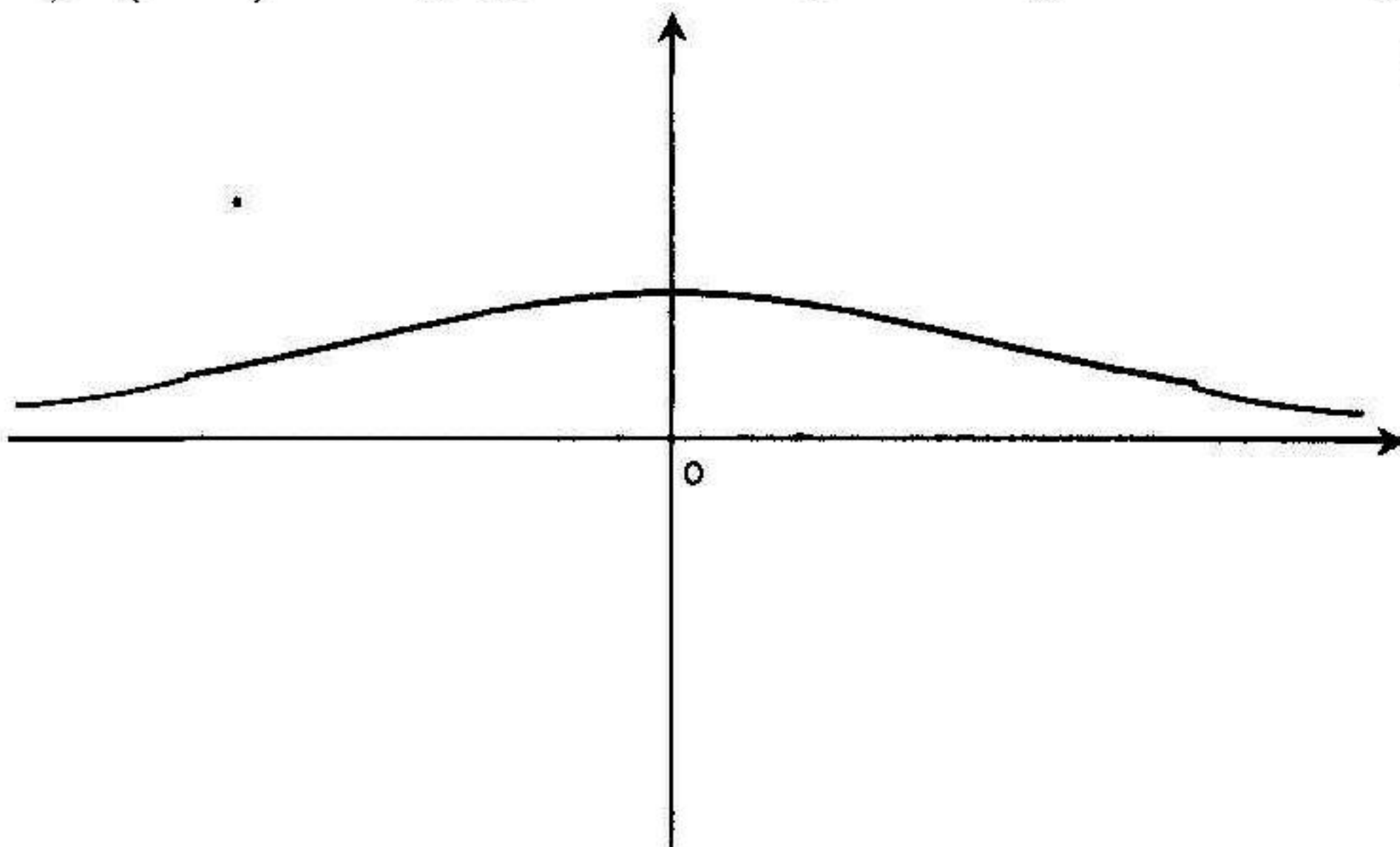
حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	0	1/3	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ المنحني :



$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} \quad (9)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$x \xrightarrow{-} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$x \xrightarrow{+} 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

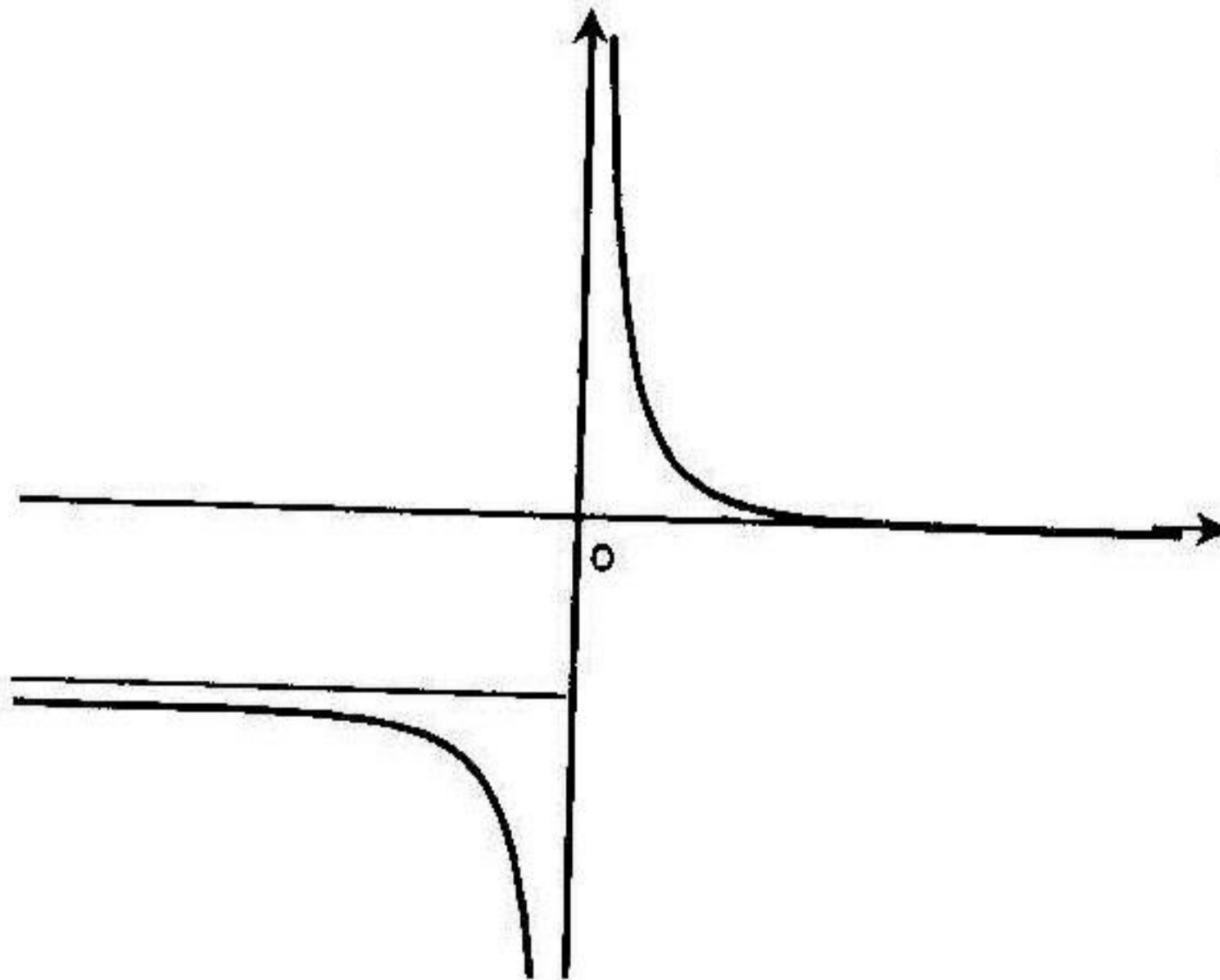
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	-2	$+\infty$	0

جدول التغيرات :

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = (x-2)e^x + xe^{-x} \quad (10)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = (x-1)(e^x - e^{-x})$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

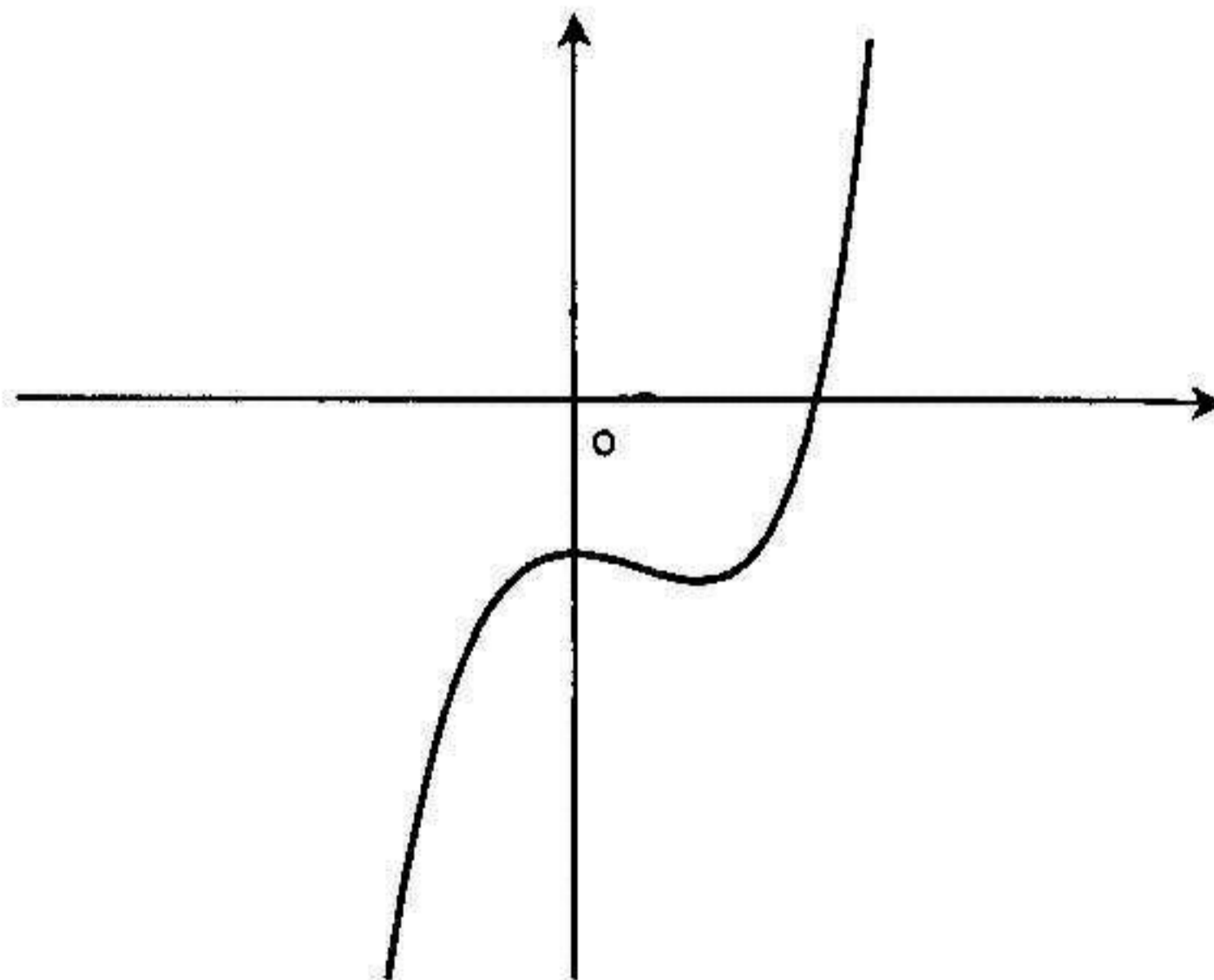
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	$f(1)$	$+\infty$	

الفروع اللانهائية :

المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب (y, y') في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} \quad (11)$$

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

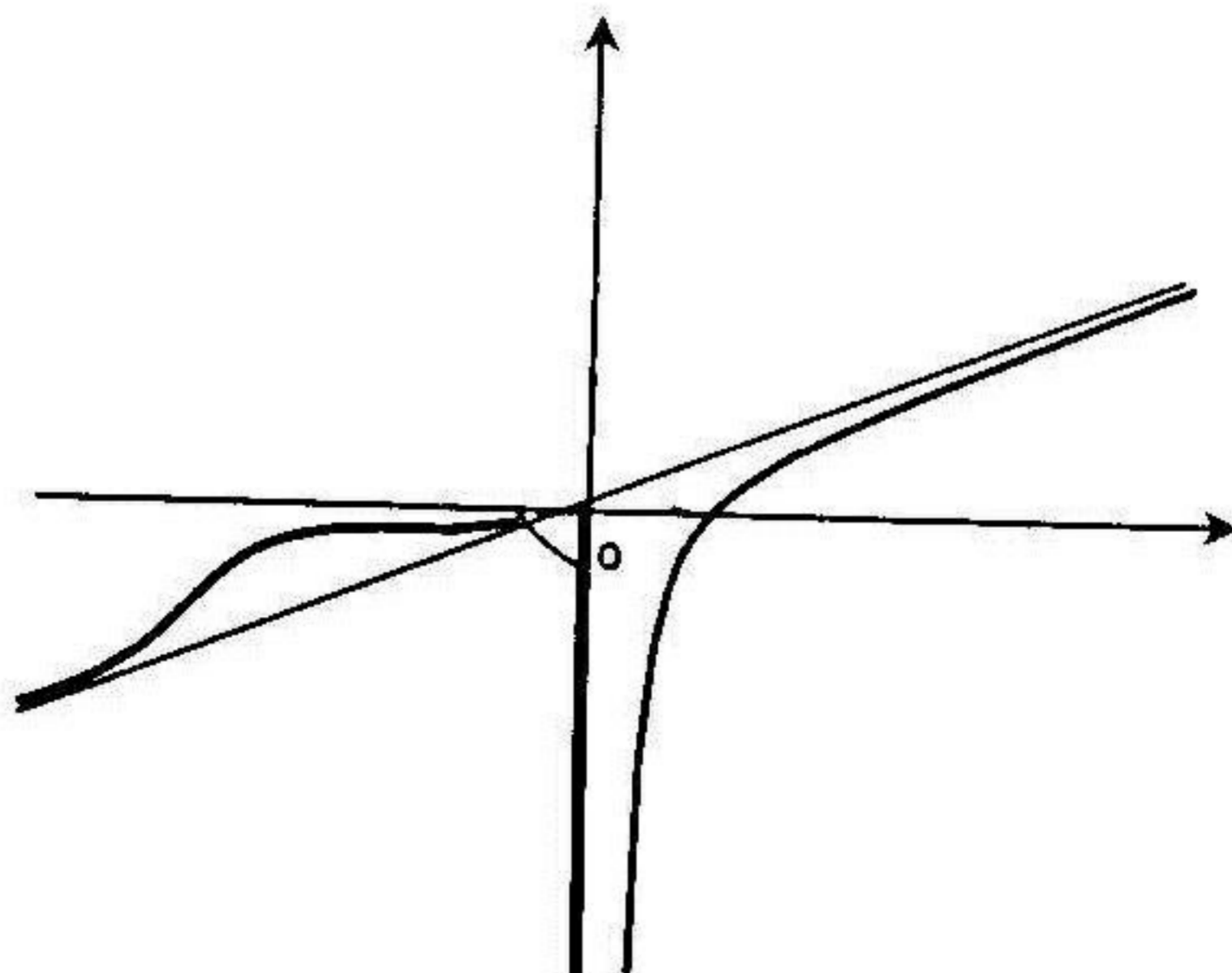
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$
 - المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى علي يمين الصفر

المنحنى :



$$f(x) = 2^x + 3e^x - 2 = e^{x \ln 2} + 3e^x - 2 \quad (12)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \ln 2 \times e^{x \ln 2} + 3e^x$

جدول التغيرات :

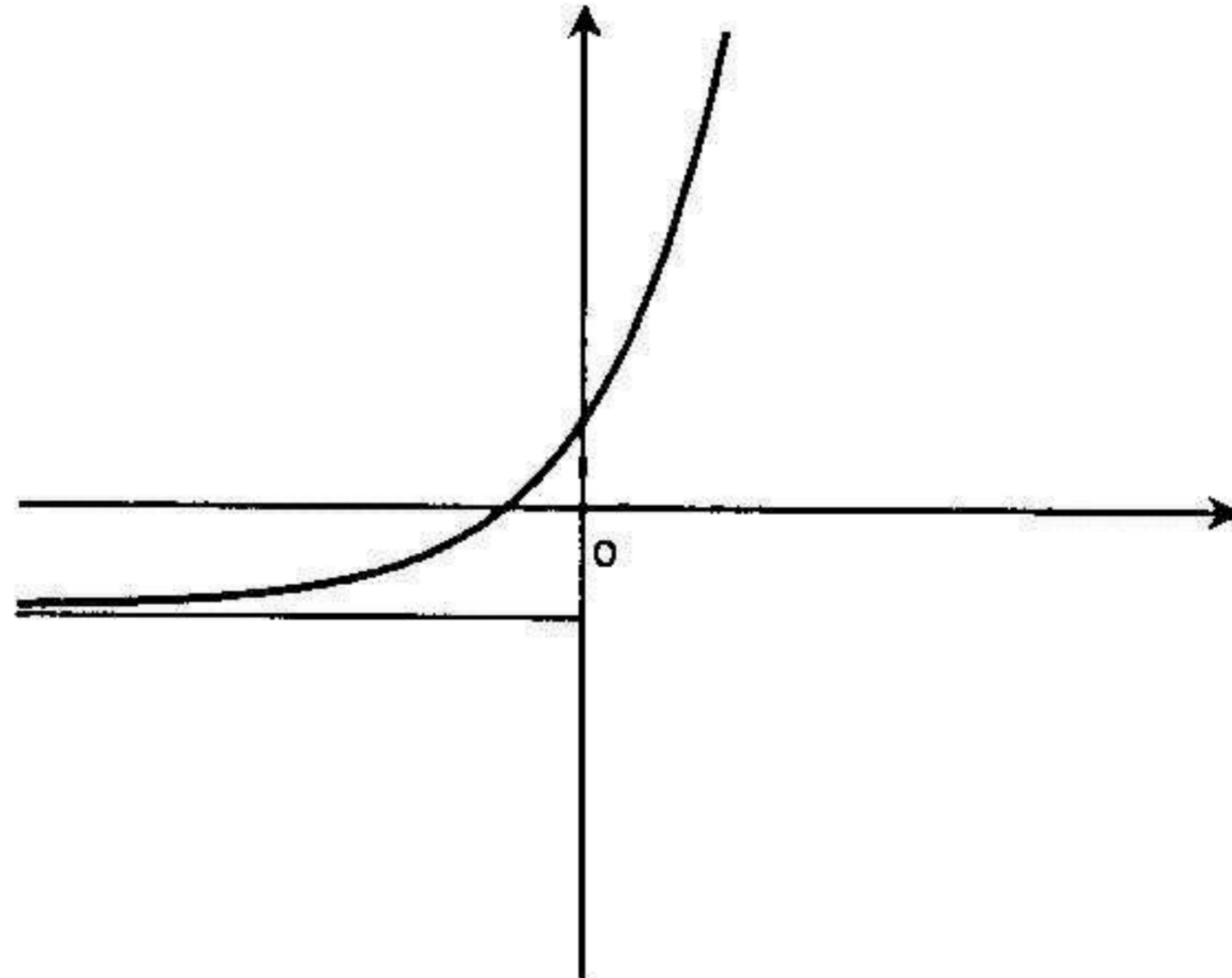
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-2	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$.

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب (yy') في جوار $(+\infty)$.

المنحنى :



مسائل محلولة

مسألة 1 :

(I) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x}$ وليكن (C) منحنيا البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

ب - أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند نقطة الانعطاف.

(3) نريد تحديد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) ، نضع $h(x) = f(x) - x$.

أ- احسب $h'(x)$ ثم $h''(x)$ و استنتج إشارة $h'(x)$.

ب - استنتج تغيرات الدالة h و إشارة $h(x)$.

ج - استنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

(5) أرسم المنحنى (C) و المستقيم (Δ) .

(6) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين

الذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$.

(II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و المعرفة بـ: $u_n = f(n) - \frac{n^2}{2}$.

(1) بين أن (u_n) هي متتالية متزايدة.

(2) هل (u_n) متتالية متقاربة؟

(3) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n و $\lim S_n$ عندما $n \rightarrow +\infty$.

الحل

(I) 1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty ; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{2} x^2 e^x + e^x - 1 \right)$$

(بوضع $x = 2K$ ، $x \rightarrow -\infty$ فإن $K \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2K)^2 \times e^{2K} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4(K \times e^K)^2 = 0 : \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{2} x^2 e^x + e^x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} (-1) = -\infty : \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة الدالة:

لكل x من D : $f'(x) = x + e^{-x} > 0$ لأن $e^{-x} > (-x)$ من أجل كل عدد $x \in \mathbb{R}$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) أ- إثبات أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف:

$$f''(x) = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x} : D \text{ من } x$$

$$f''(x) = 1 - e^{-x} = 0 \text{ يكافئ } e^{-x} = 1 \text{ ومنه } x = 0 .$$

$$f''(x) < 0 \text{ يكافئ } x \in]-\infty ; 0[$$

$$f''(x) > 0 \text{ يكافئ } x \in]0 ; +\infty[$$

بما أن $f''(x)$ يتغير عند $x = 0$ ومغيرا إشارته فالنقطة $(0; f(0))$ هي نقطة العطف .

لدينا $f(0) = 0$ ومنه $O(0;0)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C) .

- ب- معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة $O(0;0)$.
 . معادلة (Δ) هي : $y = x$ ، $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$

3 أ - حساب $h'(x)$ و $h''(x)$ و استنتاج إشارة $h'(x)$.

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x \right)' = x + e^{-x} - 1$$

$$h''(x) = 1 - e^{-x} = f''(x)$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	-	0	+
$h'(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

نستنتج من جدول تغيرات الدالة h' أنه لكل عدد x من \mathbb{R} : $h'(x) \geq 0$.

ب- دراسة تغيرات الدالة h و إشارة $h(x)$:

$$\text{لدينا : } h(x) = \frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x \text{ ومنه } D_h =]-\infty ; +\infty[$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{2} x^2 e^x + e^x - x e^x - 1 \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} - x + 1 \right) = +\infty$$

(لأن $e^{-x} \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow +\infty$)

المشتق:

لدينا : $h'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$		

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن $h(x) < 0$ من أجل $0[; -\infty] x \in$ و $h(x) > 0$ من أجل $+\infty[; 0] x \in$.

ج - استنتاج وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ) :

(C) تحت المستقيم (Δ) يكافئ $f(x) - x < 0$ يكافئ $h(x) < 0$ ومنه $0[; -\infty] x \in$.

(C) فوق المستقيم (Δ) يكافئ $h(x) > 0$ ومنه $+\infty[; 0] x \in$.

4) دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 e^x} \right) = +\infty$$

(لأن $x^2 e^x \rightarrow 0^+$ و $-\frac{1}{x^2 e^x} \rightarrow -\infty$ لما $x \rightarrow -\infty$)

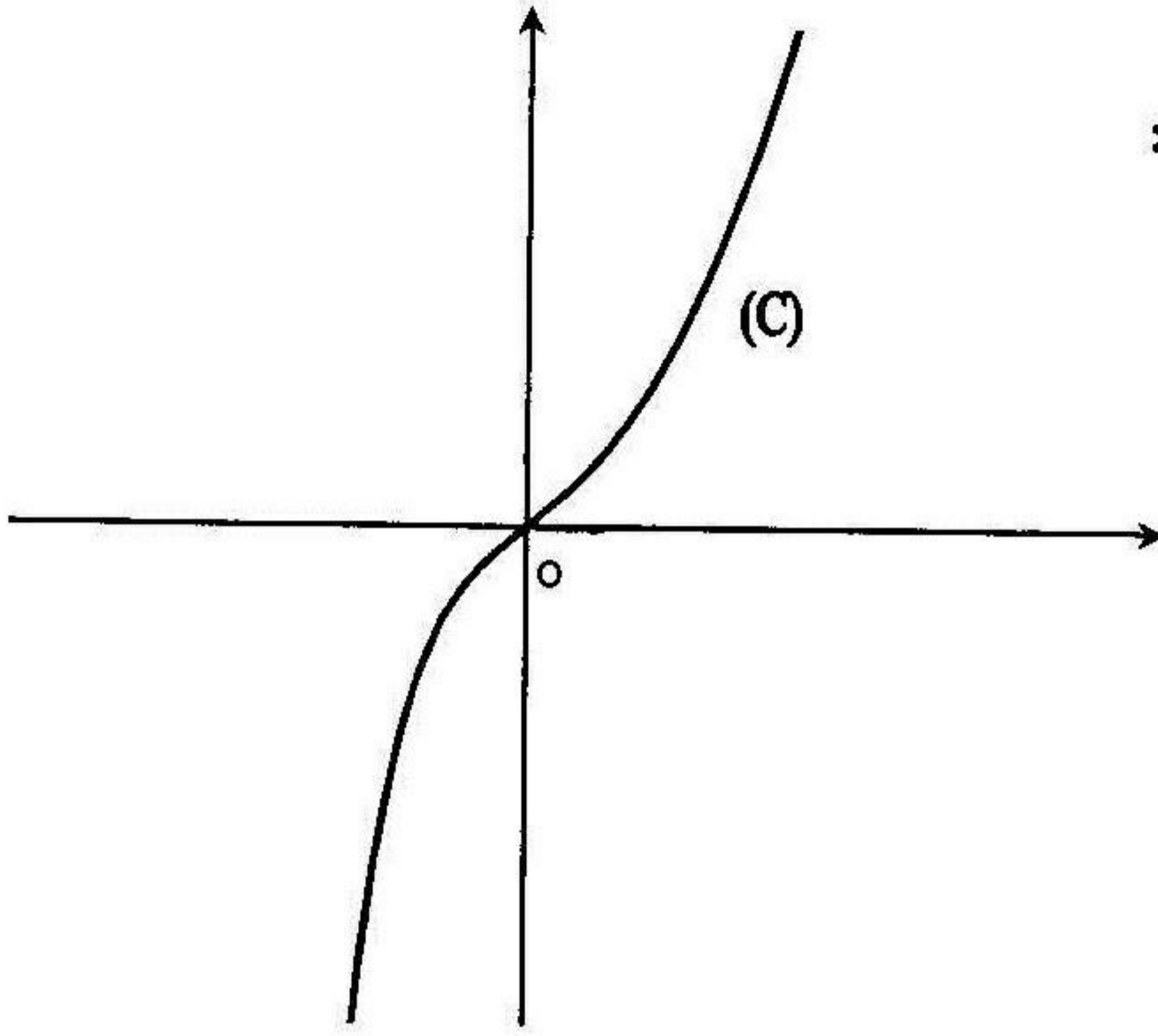
ومن المنحنى (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه $(y'y)$ في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = +\infty$$

(لأن $e^{-x} \rightarrow 0$ و $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow +\infty$)

ومن المنحنى (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه $(y'y)$ في جوار $+\infty$

(5) رسم المنحني (C) :



(6) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$:

$$S = \int_0^2 [f(x) - x] dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 1 - e^{-x} - x \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{6} x^3 + x + e^{-x} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \left[\left(\frac{4}{3} + e^{-2} \right) - 1 \right] (u.a) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{e^2} \right) (u.a)$$

(II) البرهان بأن (u_n) متتالية متزايدة:

$$u_n = f(n) - \frac{n^2}{2} = 1 - e^{-n} \quad \text{لدينا :}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - e^{-(n+1)} \right) - \left(1 - e^{-n} \right)$$

$$= e^{-n} - e^{-n-1} = e^{-n} \left(1 - e^{-1} \right) = e^{-n} \left(1 - \frac{1}{e} \right) > 0$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n > 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متزايدة .
(2) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

إذن المتتالية (u_n) متقاربة.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + \dots + (1 - e^{-n}) \quad (3)$$

$$= n \times 1 - (e^{-1} + e^{-2} \dots + e^{-n})$$

$$e^{-1} + e^{-2} \dots + e^{-n} = e^{-1} \times \frac{1 - (e^{-1})^n}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1}$$

(مجموع لـ n حد لمتتالية هندسية حدها الأول e^{-1} و أساسها $q = e^{-1}$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty, \quad S_n = n - \frac{1 - e^{-n}}{e - 1} = n + \frac{e^{-n} - 1}{e - 1}$$

مسألة 2 :

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = (2x - 3)e^{-x+2} + e$

(1) برهن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + b)e^{-x+2} = 0 \quad (b \in \mathbb{R})$

(2) أ - أدرس تغيرات الدالة g .

ب - احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = e(x - 2) + 3 - (2x - 1)e^{-x+2}$

و ليكن (C) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\frac{1}{2} \left[\dots \right]$; $x_0 \in]0$

(3) أ - برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = e \times x - 2e + 3$ هو مستقيم مقارب

للمنحني (C) .

ب - أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (D) .

(4) أنشئ المنحني (C) .

(5) ليكن $\lambda > 2$. احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بمجموعة النقاط

$M(x; y)$ حيث $2 \leq x \leq \lambda$ و $f(x) \leq y \leq e \times x - 2e + 3$.

هل $S(\lambda)$ تقبل نهاية عندما $\lambda \rightarrow +\infty$ ؟

الحل

(1) إثبات أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+b)e^{-x+2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+b)e^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^2 \times \left(2 \frac{x}{e^x} + \frac{b}{e^x} \right) = 0$$

(لأن $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ و $\frac{b}{e^x} \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow +\infty$)

(2) أ- دراسة تغيرات الدالة g :

مجموعة التعريف : $D_g =]-\infty ; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3)e^{-x+2} + e = e$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

$$g'(x) = 2 \times e^{-x+2} - e^{-x+2} (2x-3) = (5-2x)e^{-x+2}$$

لكل x من D_g : $e^{-x+2} > 0$ فإشارة $g'(x)$ هي إشارة $(5-2x)$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}} + e$	e

ب- حساب $g(1)$ و إشارة $g(x)$:

$g(1) = -e + e = 0$. من جدول التغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$g(x) < 0$ إذا كان $x \in]-\infty ; 1[$ و $g(x) > 0$ إذا كان $x \in]1 ; +\infty[$

(II - 1) دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty ; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e \times (x-2) + 3 - (2x-1)e^{-x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1) \left[e \times \frac{x-2}{2x-1} - e^{-x+2} \right] + 3 = +\infty \end{aligned}$$

(لأن $\frac{x-2}{2x-1} \rightarrow \frac{1}{2}$ و $2x-1 \rightarrow -\infty$ و $e^{-x+2} \rightarrow +\infty$ لما $x \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (لأن } (2x-1)e^{-x+2} \rightarrow 0 \text{ لما } x \rightarrow +\infty)$$

حساب المشتق ودراسة إشارته: لكل x من D_f :

$$f'(x) = e - [2 \times e^{-x+2} - e^{-x+2}(2x-1)] = (2x-3)e^{-x+2} + e = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$(3-2e)$	$+\infty$

(2) - إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in]0; \frac{1}{2}[$:

$$\left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ على المجال } f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2}e < 0, \quad f(0) = e^2 - 2e + 3 > 0$$

الدالة f مستمرة و متناقصة تماما والعدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1/2)$ ، حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in]0; \frac{1}{2}[$.

3 أ - إثبات أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = e \times x - 2e + 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (e \times x - 2e + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(2x - 1)e^{-e+2} = 0$$

إذن المستقيم (D) هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $+\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (D) :

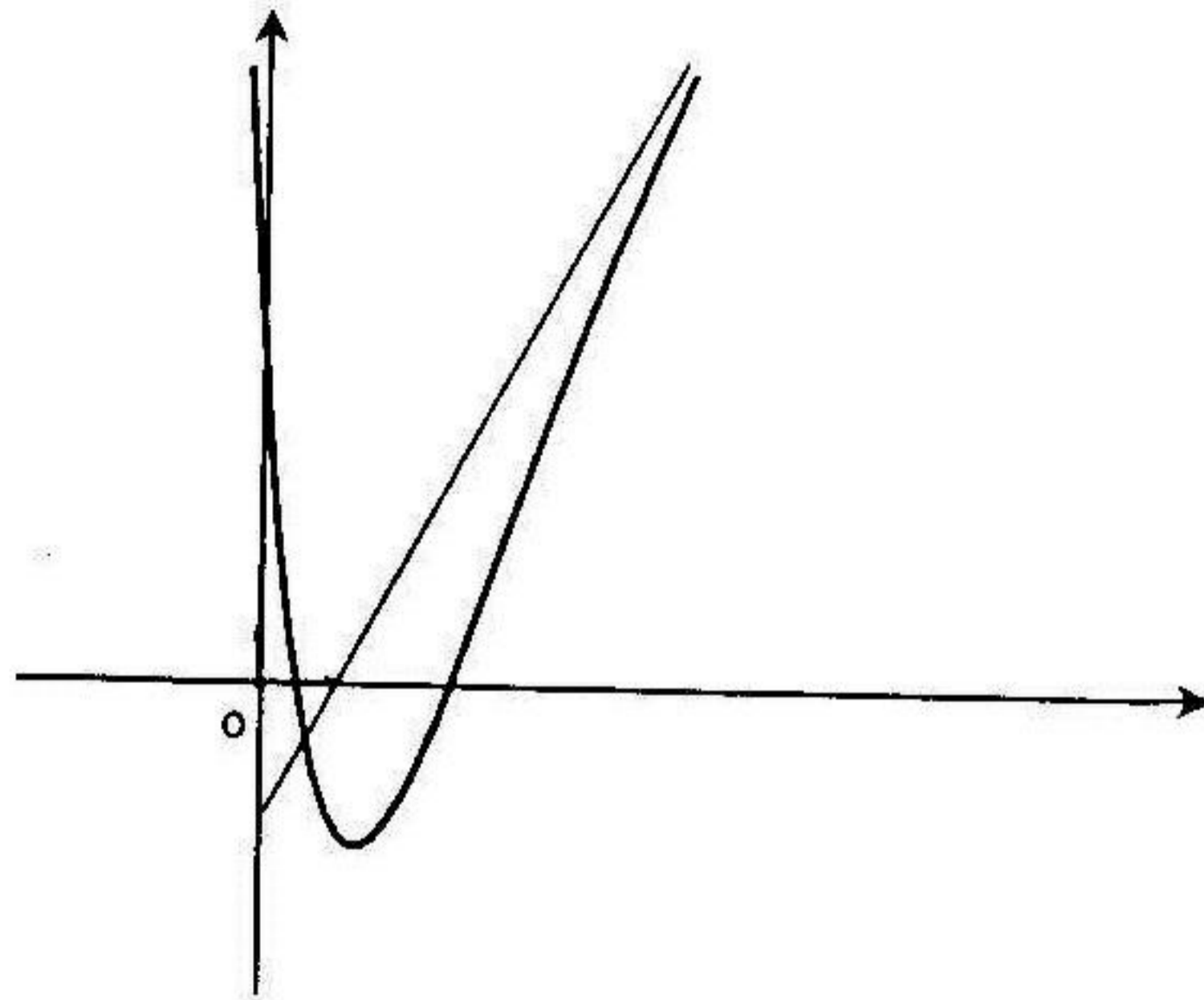
$$f(x) - (e \times x - 2e + 3) = -(2x - 1)e^{-e+2}$$

لكل عدد حقيقي $x : e^{-x+2} > 0$ ومنه :

(C) فوق المستقيم (D) يكافئ $-(2x - 1) > 0$ أي إذا كان $x < \frac{1}{2}$.

(C) تحت المستقيم (D) يكافئ $-(2x - 1) < 0$ أي إذا كان $x > \frac{1}{2}$.

4 إنشاء المنحني (C) :



9 حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \int_2^\lambda [(ex - 2e + 3) - f(x)] dx = \int_2^\lambda (2x - 1)e^{-x+2} dx$$

لستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $S(\lambda)$ ، بوضع $u(x) = 2x - 1$

ومنه $u'(x) = 2$ و $v'(x) = e^{-x+2}$ ومنه $v(x) = -e^{-x+2}$ ومنه :

$$\begin{aligned} \int_2^\lambda (2x - 1)e^{-x+2} dx &= \left[-(2x - 1)e^{-x+2} \right]_2^\lambda + 2 \int_2^\lambda e^{-x+2} dx \\ &= \left[-(2x - 1)e^{-x+2} - 2e^{-x+2} \right]_2^\lambda \\ &= \left[-(2x + 1)e^{-x+2} \right]_2^\lambda = -(2\lambda + 1)e^{-\lambda+2} + 5(u.a) \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -(2\lambda + 1)e^{-\lambda+2} + 5 = 5(u.a)$$

(لأن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\lambda + 1)e^{-\lambda+2} = 0$ انظر 1-)

مسألة 3 :

1) لتكن الدالة f_m المعرفة بـ: $f_m(x) = mx + 1 - \frac{e^x}{e^x - m}$ حيث $m \in \mathbb{R}^+$

لرمز بـ (C_m) إلى منحنى الدالة f_m في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1) برهن أن f_m تكتب على الشكل $f_m(x) = mx - \frac{m}{e^x - m}$

2) ا- عين مجموعة تعريف الدالة f_m .

ب- ادرس تغيرات الدالة f_m من أجل $m < 0$ و $m > 0$.

3) ا- عين حسب قيمة الوسيط m المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_m) .

ب- عين قيم m التي يكون من أجلها محور الترتيب مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) .

II) نعتبر الدالة f_1 ($m = 1$) و المعرفة بـ $f_1(x) = x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$ و ليكن

(C_1) منحنىها البياني في المعلم السابق (طول الوحدة $2cm$)

1) ادرس تغيرات الدالة f_1 (يمكنك استعمال نتائج الجزء 1)

2) ا- برهن أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_1) .

ب- احسب $f_1(\ln 8)$ ، $f_1(\ln 2)$.

ج - اكتب معادلة المماس للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $x = \ln 2$.

د - أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_1) .

(3) أنشئ المنحني (C_1) .

(4) ليكن λ عدد حقيقي بحيث $\lambda > \ln 8$. احسب بـ cm^2 المساحة $S(\lambda)$ لمجموعة

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 8 \leq x \leq \lambda \\ f(x) \leq y \leq x \end{array} \right. \text{النقط } N(x; y) \text{ من المستوي حيث:}$$

(III) نعتبر التناظر المركزي S الذي مركزه A .

(1) عين العبارة المركبة ثم العبارة التحليلية للتناظر S .

(2) برهن بأن المنحني (C_1) صامد إجمالاً بالتحويل S .

الحل

(1) إثبات أن $f_m(x) = mx - \frac{m}{e^x - m}$

$$f_m(x) = mx + 1 - \frac{e^x}{e^x - m} = mx + \frac{e^x - m - e^x}{e^x - m} = mx - \frac{m}{e^x - m} \text{ لدينا}$$

(2) أ - تعيين مجموعة تعريف f_m : معرفة إذا كان $e^x - m \neq 0$.

إذا كان $m < 0$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - m \neq 0$

و تكون مجموعة التعريف : $+\infty[$; $]-\infty$] $D =$

إذا كان $m > 0$ فإن $e^x - m \neq 0$ $e^x \neq m$ ومنه $x \neq \ln m$

و تكون مجموعة التعريف : $\ln m[\cup] \ln m + \infty[$; $]-\infty$] $D =$

ب- دراسة تغيرات الدالة f_m :

الحالة الأولى : $m < 0$

مجموعة التعريف : $+\infty[$; $]-\infty$] $D =$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = -\infty \text{ ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = +\infty \text{ لأن } \frac{e^x}{e^x - m} \rightarrow 1 \text{ لما } x \rightarrow +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D :

$$f'_m(x) = m - \frac{e^x(e^x - m) - e^{2x}}{(e^x - m)^2} = m \left(1 + \frac{e^x}{(e^x - m)^2} \right) < 0$$

(لأن $m < 0$ و $1 + \frac{e^x}{(e^x - m)^2} > 0$)

جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	
$f_m(x)$	$+\infty$	$-\infty$

الحالة الثانية: $m > 0$

مجموعة التعريف: $D =]-\infty ; \ln m [\cup] \ln m ; +\infty [$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow \ln m^+} f_m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln m^-} f_m(x) = +\infty$$

المشتق:

لكل x من D : $f'_m(x) = m \left(1 + \frac{e^x}{(e^x - m)^2} \right) > 0$ (لأن $m > 0$)

جدول تغيرات الدالة f_m :

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+		+
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(3) أ- تعيين المستقيمات المقاربة حسب قيم m :

الحالة الأولى: $m < 0$

- المستقيم ذو المعادلة $y = mx + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(+\infty)$.

الحالة الثانية: $m > 0$

- المستقيم ذو المعادلة $x = \ln m$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_m)
- المستقيم ذو المعادلة $y = mx + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_m) في جوار $(+\infty)$.

ب- تعيين قيمة m حتى يكون محور الترتيب $(x = 0)$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) :

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيما مقاربا للمنحنى (C_m) إذا كانت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow 0} e^x - m = 0 \text{ ومنه } e^0 - m = 0 \text{ ومنه } : m = 1$$

(II - 1) دراسة تغيرات الدالة $f_1(m = 1)$:
بتعويض الوسيط m بالقيمة 1 (في الحالة الثانية $m > 0$) نحصل على تغيرات الدالة f_1

$$\text{مجموعة التعريف: } D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = +\infty$$

المشتق:

$$f_1'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0$$

جدول تغيرات الدالة f_1 :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	+		+
$f_1(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

(2) أ- إثبات أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_1) :

لكل x من D :

$$\begin{aligned} f_1(-x) + f_1(x) &= -x + 1 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} + x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} \\ &= 2 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} = 2 - \frac{e^x}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1} \\ &= 2 - \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

بما أن $f_1(-x) + f_1(x) = 1$ فالنقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_1)

ب- حساب $f_1(\ln 2)$ ، $f_1(\ln 8)$

$$f_1(\ln 2) = 1 + \ln 2 - \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = 1 + \ln 2 - \frac{2}{2-1} = -1 + \ln 2$$

$$f_1(\ln 8) = 1 + \ln 8 - \frac{8}{7} = -\frac{1}{7} + \ln 8$$

ج- كتابة معادلة المماس للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $x = \ln 2$:

$$y = f_1'(\ln 2)(x - \ln 2) + f_1(\ln 2) = 3(x - \ln 2) - 1 + \ln 2$$

$$= 3x - 1 - 2\ln 2$$

د - الفروع اللانهائية للمنحني (C_1) :

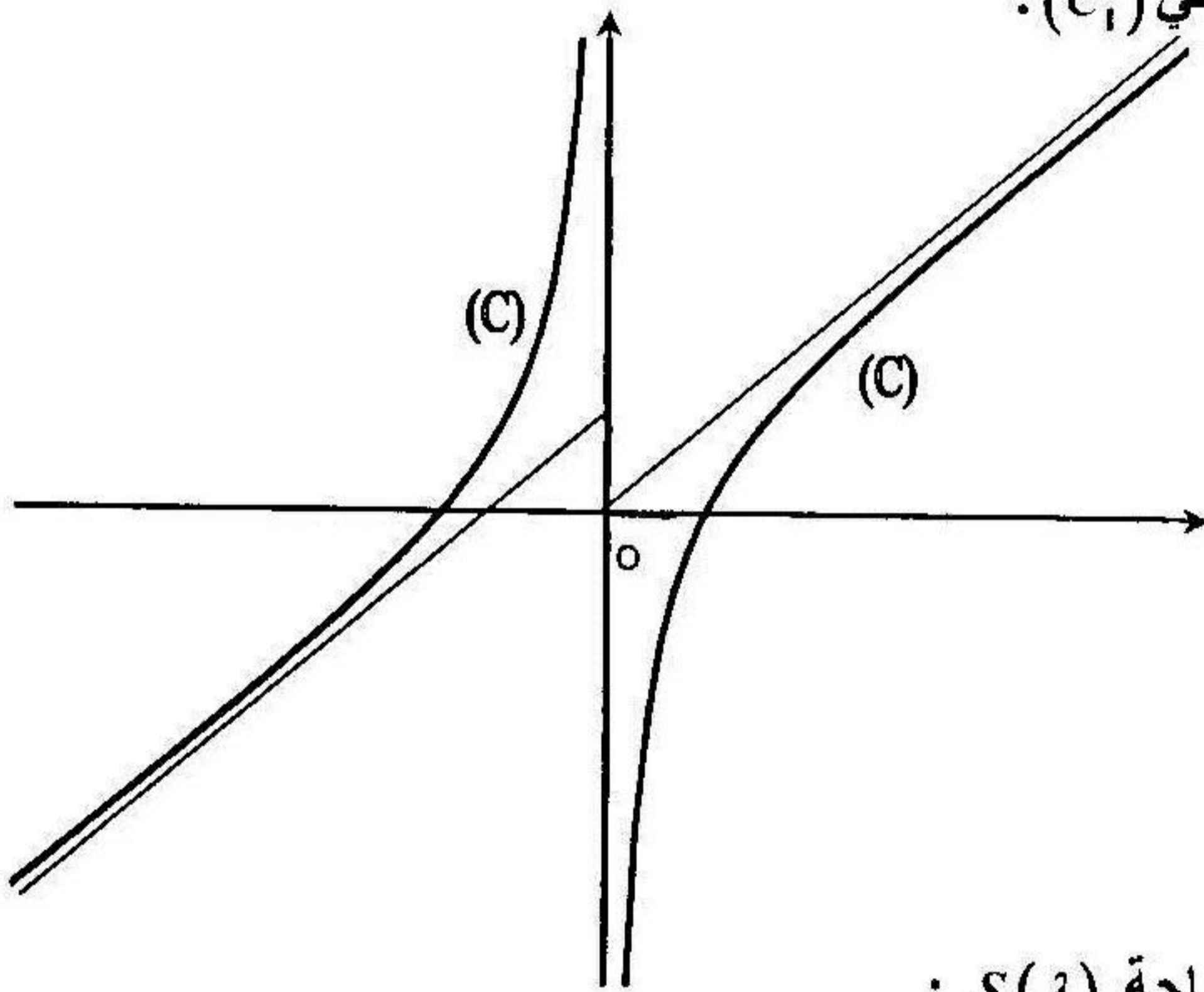
من الدراسة السابقة (الجزء 1) وبتعويض $m = 1$ نجد:

المستقيم $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1) . المستقيم ذو المعادلة $y = x + 1$

هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1) في جوار $(-\infty)$. المستقيم ذو المعادلة $y = x$

هو مستقيم مقارب للمنحني (C_1) في جوار $(+\infty)$.

(3) إنشاء المنحني (C_1) :



(4) حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$\int_{\ln 8}^{\lambda} [x - f_1(x)] dx = \int_{\ln 8}^{\lambda} \left[-1 + \frac{e^x}{e^x - 1} \right] dx$$

$$= -\int_{\ln 8}^{\lambda} dx + \int_{\ln 8}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x - 1} dx = [-x]_{\ln 8}^{\lambda} + [\ln(e^x - 1)]_{\ln 8}^{\lambda}$$

$$[(-\lambda + \ln 8) + \ln(e^{\lambda} - 1) - \ln 7] \times 4cm^2 = \left[-\lambda + \ln \frac{8(e^{\lambda} - 1)}{7} \right] \times 4cm^2$$

(III - 1) العبارة المركبة و العبارة التحليلية للتناظر S :
 نعلم أن العبارة المركبة للتناظر المركزي هي من الشكل : $z' = -z + \beta$

$$A \left(0; \frac{1}{2} \right) \text{ مركز التناظر معناه } S(A) = A \text{ يكافئ } \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i + \beta$$

ومنه $\beta = i$ ومنه : $z' = -z + i$ و هي العبارة المركبة للتناظر S .

$$\text{لدينا } z' = -z + i \text{ يكافئ } x' + iy' = -(x + iy) + i$$

$$\text{ومنه : } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + 1 \end{cases} \text{ وهي العبارة التحليلية للتناظر } S .$$

(2) إثبات أن المنحني (C_1) صامد إجمالاً بالتحويل S .

التحويل S هو تناظر مركزي مركزه النقطة $A \left(0; \frac{1}{2} \right)$ التي هي مركز تناظر المنحني

(C_1) و هذا يعني أن صورة كل نقطة من المنحني (C_1) هي نقطة تنتمي إلى المنحني

(C_1) . نستنتج أن صورة المنحني (C_1) هي نفسه، أي المنحني (C_1) صامد إجمالاً

بالتحويل S .

توجد طريقة أخرى للإجابة على هذا السؤال (نعين معادلة صورة المنحني (C_1) بالتحويل

S ، سنجدها مماثلة لمعادلة (C_1) ، و هذا يعني أن صورة المنحني (C_1) هي نفسه

(صامد إجمالاً) .

مسألة 4 :

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ و ليكن (C) منحنياً البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$.

(1) أ- برهن أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. ب) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- برهن أن $\lim x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) = 1$ لما $|x| \rightarrow +\infty$ (يمكنك وضع $u = \frac{1}{x+1}$)

ب- استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

(3) انشئ المنحني (C) .

(4) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \ln f(x)$.

أ- تحقق أن $g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$

ب- باستعمال دراسة تغيرات الدالة f ، استنتج تغيرات الدالة g .

ج- أنشئ في معلم جديد متعامد ومتجانس المنحني (C') للدالة g .

(5) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيمت :

$x=1$ ، $x=0$ ، $y=0$

الحل

1) - إثبات أن $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

(حالة عدم تعيين $0 \times \infty$ لأن $e^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow +\infty$ لما $x \rightarrow -1$) $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$

بوضع $u = \frac{1}{x+1}$ ومنه لما $x \rightarrow -1$ فإن $u \rightarrow +\infty$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$$

ب) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

حساب النهايات :

(لأن $e^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow 1$ لما $x \rightarrow -\infty$) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(لأن $x+1 \rightarrow 0^-$ و $\frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty$ و $e^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow 0$) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

حساب المشتق ودراسة اشارته :

لكل x من D_f :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \times e^{\frac{1}{x+1}} \times (x+1)$$

$$= e^{\frac{1}{x+1}} - \frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}}$$

$f'(x) = 0$ إذا كان $x = 0$ ، $f'(x) > 0$ يكافئ $\frac{x}{x+1} > 0$ ،
 يكافئ $x(x+1) > 0$ ومنه : $x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$

$f'(x) < 0$ يكافئ $\frac{x}{x+1} < 0$ يكافئ $x(x+1) < 0$
 ومنه : $x \in [-1 ; 0 [$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1^-	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	e	$+\infty$

(2) أ- إثبات أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) = 1$ لما $|x| \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \infty \times 0 \text{ (حالة عدم تعيين) .}$$

بوضع $u = \frac{1}{x+1}$ ، $u \rightarrow 0$ لما $|x| \rightarrow +\infty$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \times \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x+1}} = 1 \times \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

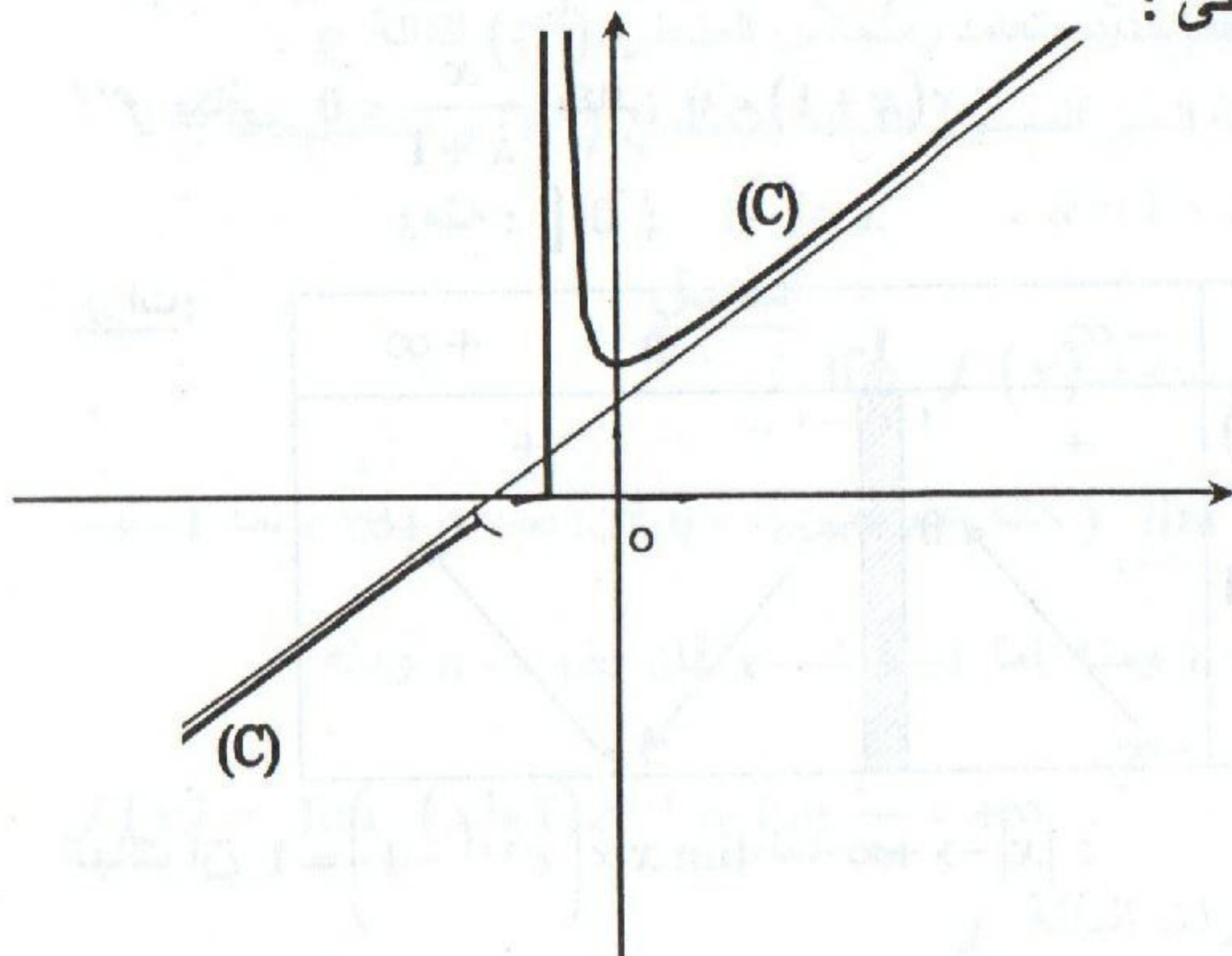
ب- استنتاج المستقيم $(D): y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - (x+2) =$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times e^{\frac{1}{x+1}} - x + e^{\frac{1}{x+1}} - 2 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \times \left(e^{\frac{1}{x+1}} - 1 \right) + e^{\frac{1}{x+1}} - 2$$

$$= 1 + 1 - 2 = 0$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.
 (3) رسم المنحنى :



(4) أ - التحقق بأن $g(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$ لكل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، لدينا :

$$g(x) = \ln f(x) = \ln(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

$$= \ln(x+1) + \ln e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$$

ب- استنتاج تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad (\text{لأن } f(x) \rightarrow +\infty \text{ و } \ln f(x) \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = +\infty \quad (\text{لأن } f(x) \rightarrow +\infty \text{ لما } x \rightarrow -1^+)$$

المشتق: لكل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g'(x) = [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

على المجال $]-1; +\infty[$ لدينا $f(x) > 0$ (انظر جدول تغيرات الدالة f)

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

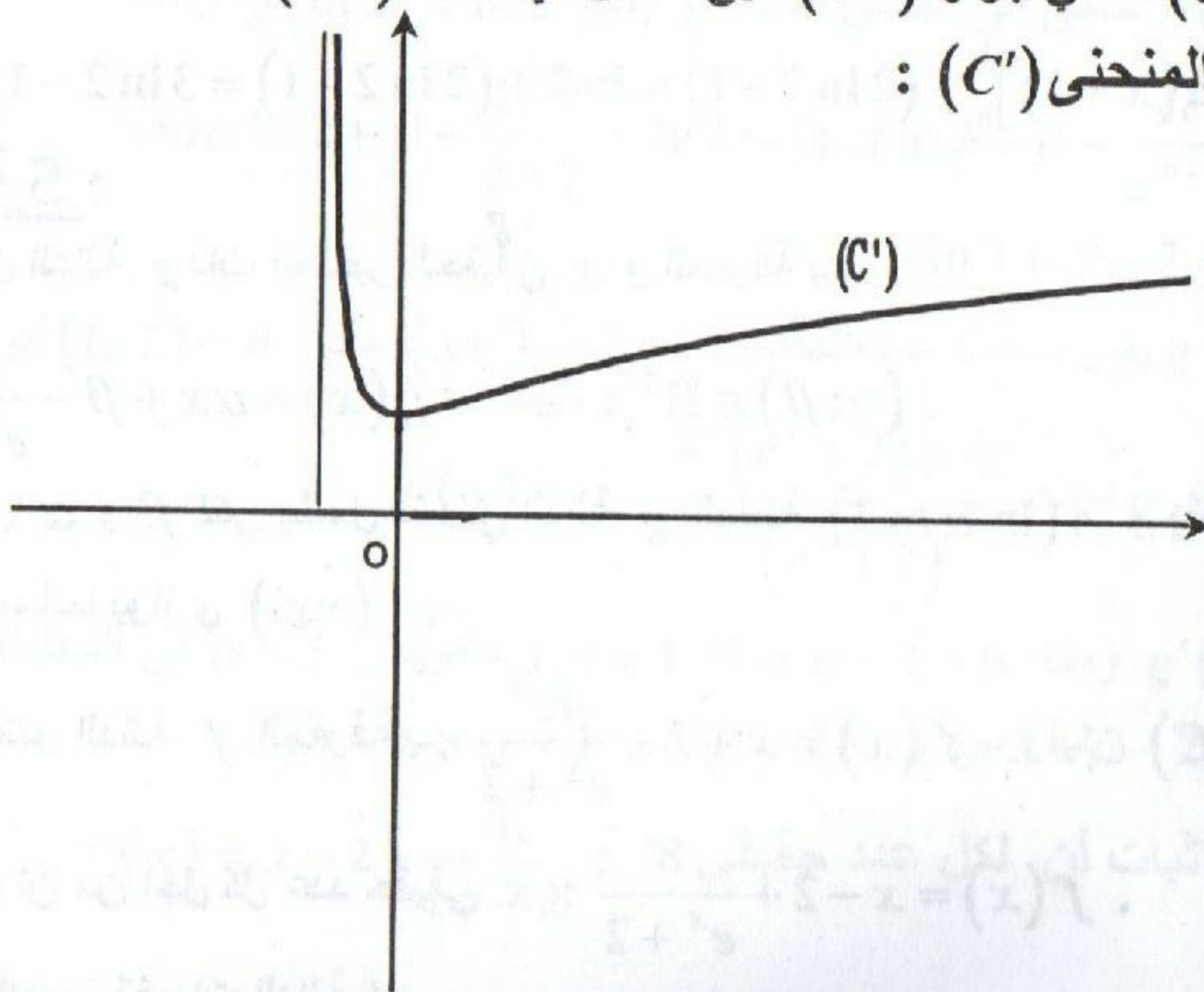
x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$		$+\infty$	$+\infty$

المستقيم $x = -1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C') .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$$

المنحنى (C') له في جوار $(+\infty)$ فرع مكافئ في اتجاه (xx') .

→ - إنشاء المنحنى (C') :



(5) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيمات

$$: x=1, x=0, y=0$$

$$S = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx + \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$= [\ln(x+1)]_0^1 + \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نحسب: $\int_0^1 \ln(x+1) dx$

بوضع $p'(x) = 1$ ومنه $p(x) = x$ و $h(x) = \ln(x+1)$ ومنه $h'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\int_0^1 \ln(x+1) dx = [x \times \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

$$= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= [x \times \ln(x+1) - x + \ln(x+1)]_0^1$$

$$= [(x+1) \times \ln(x+1) - x]_0^1 = (2 \ln 2 - 1)$$

ومنه:

$$S = [\ln(x+1)]_0^1 + (2 \ln 2 - 1) = \ln 2 + (2 \ln 2 - 1) = 3 \ln 2 - 1 (u.a)$$

مسألة 5:

(I) لتكن الدالة g ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بـ:

$$. (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ حيث } g(x) = \alpha x + \beta - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

- عين α و β لكي يشمل منحني الدالة g النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ و يقبل عند هذه

النقطة مماسا يوازي (xx') .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$ ، وليكن (C) منحنيها.

(1) أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$.

(2) أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أثبت أن المنحني (C) تقبل مستقيمين مقاربين مانلين يطلب تعيين معادلتها ثم حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة لكل منهما.

3. أثبت أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4. أ- أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث: $-2 < x_0 < -1$.
ب- أنشئ المنحني (C).

5. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

6. أ- عين دالة أصلية للدالة g المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x ب: $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$
ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} .

ب- احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمت التي معادلاتها $y = x - 2$ ، $x = 0$ ، $x = \lambda$ ($\lambda > 0$) ثم احسب :
 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

الحل

1) تعيين العددين α و β :

$A(\ln 2; \ln 2)$ تنتمي إلى منحني الدالة g يعني $g(\ln 2) = \ln 2$ ومنه

$$\alpha \ln 2 + \beta - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2} + 2} = \ln 2 \quad \text{ومنه} \quad \alpha \ln 2 + \beta - \frac{4 \times 2}{2 + 2} = \ln 2 \quad \text{ومنه}$$

$$\alpha \ln 2 + \beta - 2 = \ln 2 \quad (*)$$

منحني الدالة g يقبل مماسا عند النقطة A يوازي (xx') معناه $g'(\ln 2) = 0$

$$g'(x) = \alpha - \frac{4^x (e^x + 2) - 4e^{2x}}{(e^x + 2)^2} = \alpha - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$g'(\ln 2) = 0$ ومنه $\alpha - 1 = 0$ ومنه $\alpha = 1$ و بتعويض $\alpha = 1$ في المعادلة (*)

نجد: $\ln 2 + \beta - 2 = \ln 2$ ومنه $\beta = 2$ إذن $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

II = 1) إثبات أن لكل عدد حقيقي x : $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + 4 - \frac{4e^x}{e^x + 2}$$

$$= x - 2 + \frac{4(e^x + 2) - 4e^x}{e^x + 2} = x - 2 + \frac{8}{e^x + 2}$$

(2) دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty ; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \frac{8}{e^x + 2} = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_f :

$$f'(x) = \left(x - 2 + \frac{8}{e^x + 2} \right)' = 1 - \frac{8e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x + 2)^2 - 8e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} - 4e^x + 4}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2}{(e^x + 2)^2} = \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2 \geq 0$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

(3) أ- إثبات أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{4e^x}{e^x + 2} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$.

$$\text{لدينا : } -\frac{4e^x}{e^x + 2} < 0 \text{ ومنه المنحني (C) تحت المستقيم المقارب } y = x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{e^x + 2} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(+\infty)$.

$$\text{لدينا : } \frac{8}{e^x + 2} > 0 \text{ ومنه المنحني (C) فوق المستقيم المقارب } y = x - 2$$

ب- إثبات أن المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف :

لكل x من \mathbb{R} :

$$f''(x) = \left[\left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)^2 \right]' = 2 \times \frac{e^x - 2}{e^x + 2} \times \left(\frac{e^x - 2}{e^x + 2} \right)' = 8e^x \times \frac{e^x - 2}{(e^x + 2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{ يكافئ } e^x - 2 = 0 \text{ ومنه } e^x = 2 \text{ ومنه } x = \ln 2$$

$$f''(x) > 0 \text{ إذا كان } x > \ln 2 \text{ و } f''(x) < 0 \text{ إذا كان } x < \ln 2$$

بما أن $f''(x)$ ينعدم من أجل $x = \ln 2$ و مغيرا إشارته فالنقطة $(\ln 2; f(\ln 2))$

أو النقطة $A(\ln 2; \ln 2)$ هي نقطة انعطاف.

(4) أ- إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $-2 < x_0 < -1$

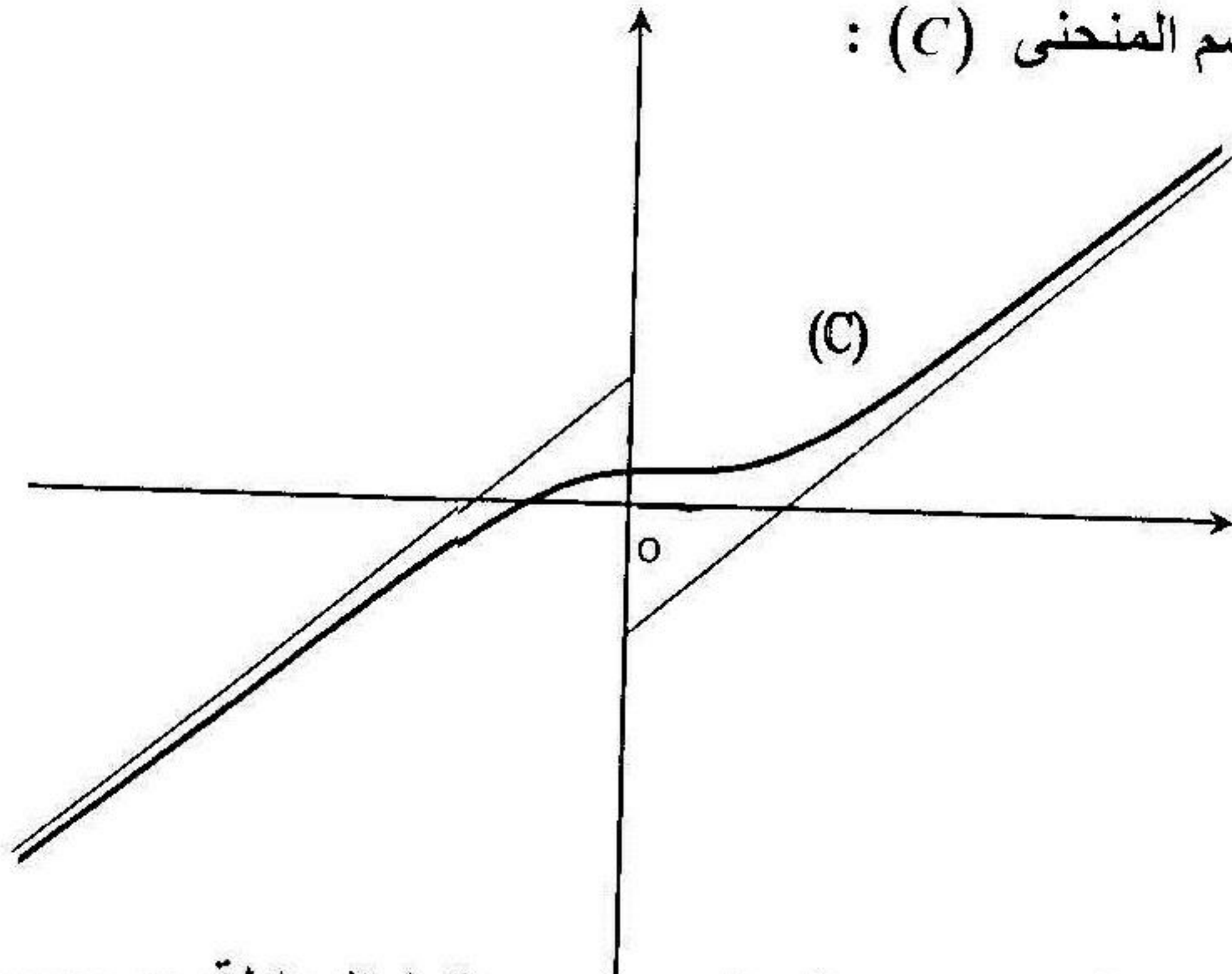
$$f(-1) = \frac{2e - 3}{2e + 1} > 0, \quad f(-2) = -\frac{4e^{-\ln 2}}{e^{-\ln 2} + 2} = -\frac{4 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = -\frac{4}{5} < 0$$

بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة على المجال $[-2; -1]$ والعدد 0 محصور

بين $f(-1)$ و $f(-2)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا

وهذا $x_0 \in]-2; -1[$

ب- رسم المنحني (C) :



- (5) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x) = x + m$.
المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = x + m$ يوازي المستقيمين المقاربين للمنحني (C) و يقطع (yy') في النقطة $(0; m)$. من التمثيل البياني (C) و المستقيم (D_m) نلاحظ أن إذا كان $m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ فإن $(C) \cap (D_m) = \{ \}$ و المعادلة $f(x) = x + m$ ليس لها حلول .
إذا كان $m \in]-2; 2[$ فإن (D_m) و (C) يتقاطعان في نقطة وحيدة و المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا .

(6) أ- تعيين دالة أصلية للدالة g حيث : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$:

$$\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c \quad \text{نلاحظ أن } (e^x + 1)' = e^x \text{ إذن لدينا الشكل } \int \frac{e^x}{e^x + 2} dx$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \ln(e^x + 2) + c$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f :

$$\int f(x) dx = \int \left(x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x - 4 \ln(e^x + 2) + c$$

ب- حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \int_0^\lambda [f(x) - (x-2)] dx = \int_0^\lambda \left[\left(x+2 - \frac{4e^x}{e^x+2} \right) - (x-2) \right] dx$$

$$= 4 \int_0^\lambda \left(1 - \frac{e^x}{e^x+2} \right) dx = 4 \left[x - \ln(e^x+2) \right]_0^\lambda$$

$$= 4 \left[\lambda - \ln(e^\lambda+2) + \ln 3 \right] (u.a)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 4 \times \left[\lambda - \ln(e^\lambda+2) + \ln 3 \right]$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 4 \left[\ln e^\lambda - \ln(e^\lambda+2) + \ln 3 \right]$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 4 \left(\ln \frac{e^\lambda}{e^\lambda+2} + \ln 3 \right) = 4 \ln 3$$

لأن $\frac{e^\lambda}{e^\lambda+2} \rightarrow 1$ و $\ln \frac{e^\lambda}{e^\lambda+2} \rightarrow 0$ لما $\lambda \rightarrow +\infty$.

مسألة 6 :

1) نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

1) حل في \mathbb{R} المعادلة : $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ ثم استنتج مجموعة تعريف الدالة f .

2) احسب $f(\ln 4)$ ، $f(\ln 3)$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ، نرسم (C) لمنحني الدالة f في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

3) ا- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

ب انشئ المنحني (C) .

4) نألفش بياناً و حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة التالية:

$$(2-m)e^{2x} + (3m-3)e^x - 2m = 0$$

(II) لتكن الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x و المعرفة ب:

$$g(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

(1) باستعمال دراسة الدالة f ، استنتج تغيرات الدالة g .

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (γ) للدالة g .

(3) أنشئ المنحني (γ) للدالة g .

الحل

(1) حلول المعادلة: $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

بوضع $e^x = z > 0$ ، المعادلة تكتب $z^2 - 3z + 2 = 0$ يكافئ $(z_1 = 2 \text{ أو } z_2 = 1)$ ومنه $(x_1 = \ln z_1 = \ln 2 \text{ و } x_2 = \ln z_2 = \ln 1 = 0)$

ومنه حلول المعادلة $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ هي: $x_1 = \ln 2$ و $x_2 = 0$

إذن مجموعة تعريف الدالة f هي: $+\infty[; \ln 2 [\cup] 0 ; 0 [\cup] -\infty] D =$

(2) أ- حساب $f(\ln 3)$ ، $f(\ln 4)$:

$$f(\ln 3) = \frac{2e^{2\ln 3} - 3e^{\ln 3}}{e^{2\ln 3} - 3e^{\ln 3} + 2} = \frac{2e^{\ln 9} - 3 \times 3}{e^{\ln 9} - 3 \times 3 + 2} = \frac{2 \times 9 - 9}{9 - 9 + 2} = \frac{9}{2}$$

$$f(\ln 4) = \frac{2e^{2\ln 4} - 3e^{\ln 4}}{e^{2\ln 4} - 3e^{\ln 4} + 2} = \frac{2 \times 16 - 12}{16 - 12 + 2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

ب- دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة التعريف: $+\infty[; \ln 2 [\cup] 0 ; 0 [\cup] -\infty] D_f =$

حساب النهايات:

• $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = -\infty$ (لأن $e^{2x} - 3e^x + 2 \rightarrow 0^+$ لما $x \rightarrow 0^-$)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \xrightarrow{<} \ln 2} f(x) = -\infty$ (لأن $e^{2x} - 3e^x + 2 \rightarrow 0^-$ لما $x \xrightarrow{<} \ln 2$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}} \right) = 2$ ، $\lim_{x \xrightarrow{>} \ln 2} f(x) = +\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

لكل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{(4e^{2x} - 3e^x)(e^{2x} - 3e^x + 2) - (2e^{2x} - 3e^x)(2e^{2x} - 3e^x)}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^2}$$

$$= \frac{e^x(-3e^{2x} + 8e^x - 6)}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^2}$$

لكل x من D_f : $\frac{e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^2} > 0$ و إشارة $f'(x)$ هي إشارة

العبارة $(-3e^{2x} + 8e^x - 6)$.

بوضع $e^x = z$ فإن $-3e^{2x} + 8e^x - 6 = -3z^2 + 8z - 6$ ومميزها :

$\Delta' = 16 - 18 = -2 < 0$. إذن من أجل كل z من \mathbb{R} : $-3z^2 + 8z - 6 < 0$

إذن $-3e^{2x} + 8e^x - 6 < 0$ لكل x من D_f .

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	

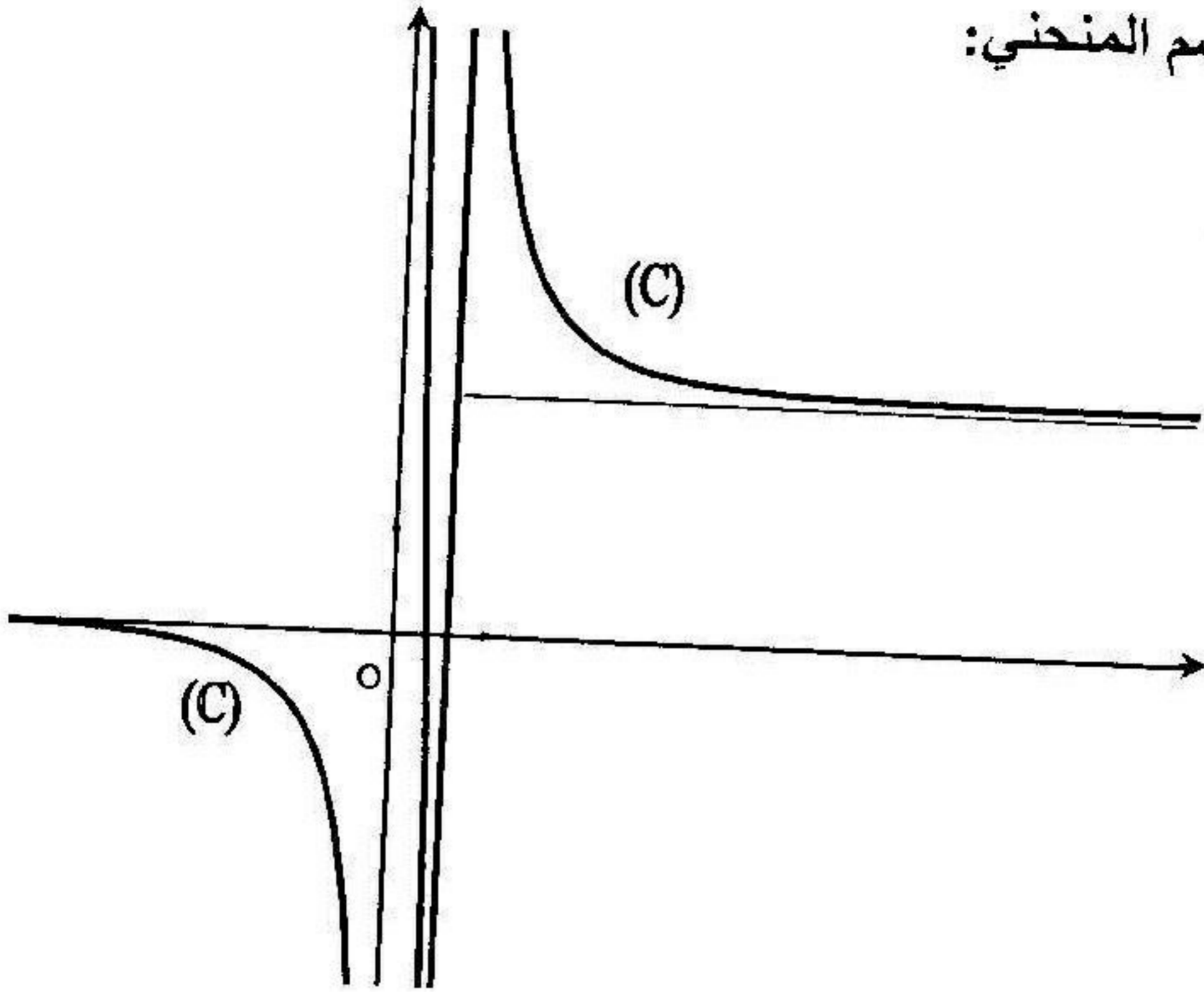
3. أ- دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C) :

المستقيمان $x = 0$ و $x = \ln 2$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (C) .

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(+\infty)$

ب- رسم المنحني:



4 المناقشة بيانياً للمعادلة $(2-m)e^{2x} + (3m-3)e^x - 2m = 0$

تكافئ $(2-m)e^{2x} + (3m-3)e^x - 2m = 0$

ومنه: $m(-e^{2x} + 3e^x - 2) + 2e^{2x} - 3e^x = 0$

ومنه: $\frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} = m$ ومنه $2e^{2x} - 3e^x = m(e^{2x} - 3e^x + 2)$

$f(x) = m$

عدد حلول المعادلة المعطاة هو عدد نقاط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (D_m)

ذو المعادلة $y = m$ و هو يوازي (xx') .

إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطتان ، فالمعادلة

$f(x) = m$ تقبل حلين .

إذا كان $m \in]0; 2[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطة واحدة ،

فالمعادلة $f(x) = m$ تقبل حلاً وحيداً .

إذا كان $m \in]2; +\infty[$ فإن (C) يقطع المستقيم (D_m) في نقطتان ، فالمعادلة

$f(x) = m$ تقبل حلين .

(II) 1) دراسة تغيرات الدالة g :

لدينا $g(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$ ، تكون الدالة g معرفة إذا كان $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$ ومنه $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$

حساب النهايات :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= -\infty & , & & \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \ln 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty & , & & \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} g(x) &= -\infty \end{aligned}$$

(لأن $e^{2x} - 3e^x + 2 \rightarrow +\infty$ لما $x \rightarrow +\infty$)

حساب المشتق $g'(x)$ و دراسة إشارته :

$$g'(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} = f(x) : D \text{ من } x$$

من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

$g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ ، $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]\ln 2; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-			+
$g(x)$	$\ln 2$ ↘ $-\infty$			$-\infty$ ↗ $+\infty$

(2) دراسة الفروع اللانهائية لمنحني الدالة g :

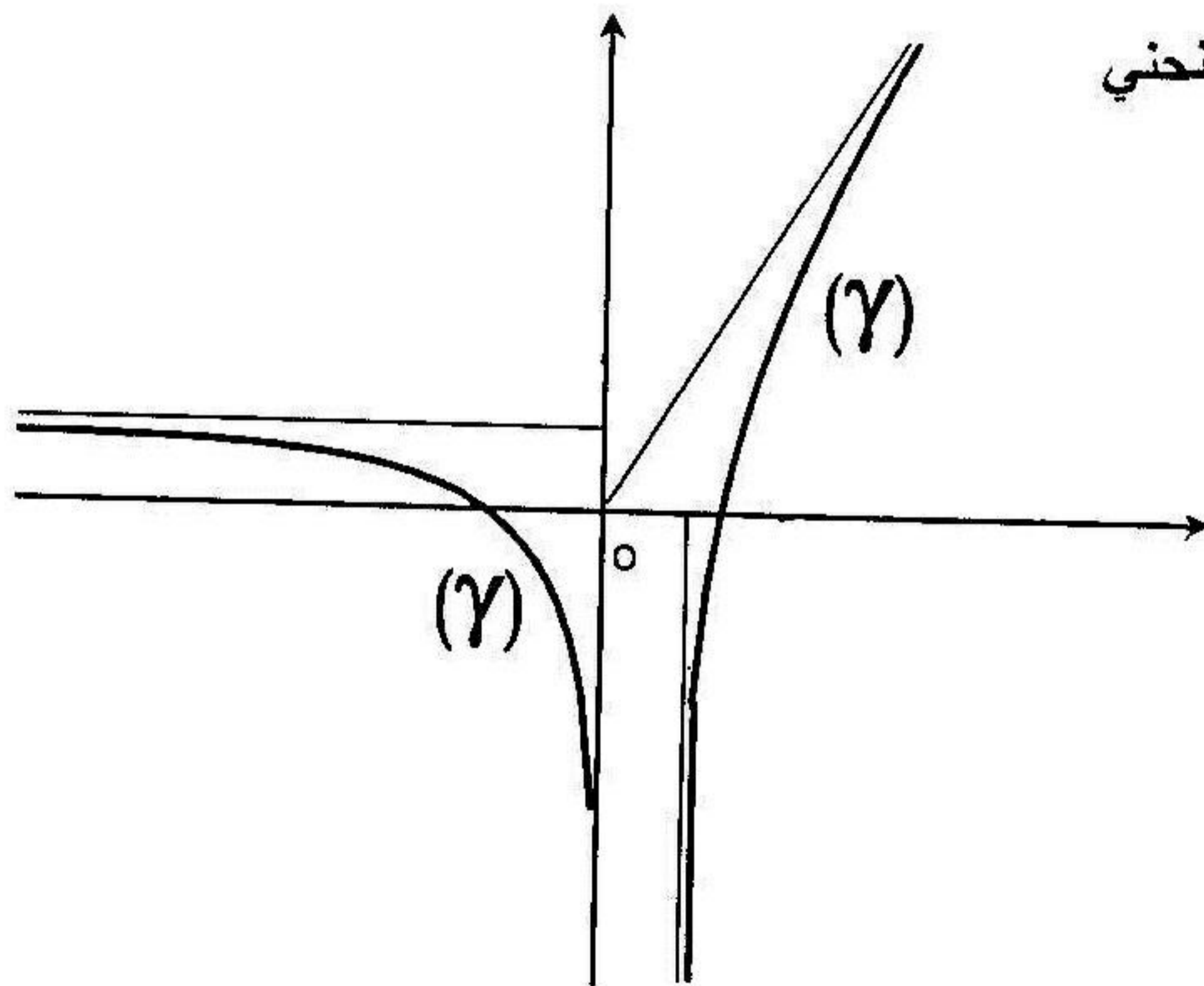
المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (γ) .

المستقيم ذو المعادلة $x = \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (γ) .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - 3e^x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{2x} (1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{2x} + \ln(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x})}{x} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - \ln e^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^{2x}} = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

إذن في جوار $(+\infty)$ المنحني (γ) يقبل مستقيماً مقارباً ذو المعادلة $y = 2x$.



(3) رسم المنحني

دوال أسية مقترحة للدراسة

ادرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

$$1) f(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x - 1 , \quad 2) f(x) = x + (x-1)e^x , \quad 3) f(x) = e^x + 1 - xe^x$$

$$4) f(x) = |e^{2x} - e^x| - 2 , \quad 5) f(x) = (2x+1)e^{-x} - x(x-1)$$

$$6) f(x) = x - 1 - \frac{2}{e^x - 1} , \quad 7) f(x) = (x^2 + 3x + 4)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$8) f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1} , \quad 9) f(x) = (x-1)e^{ix} //$$

$$10) f(x) = x^2 + x - e^{x^2+x-12} , \quad 11) f(x) = e^{|x^2-2x|}$$

$$12) f(x) = \frac{e^x - 3}{e^{2x} - 8} , \quad 13) f(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x} - e^x$$

$$14) f(x) = (x^2 + x - 5)e^{-x} , \quad 16) f(x) = xe^{||x||}$$

$$17) f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-\frac{1}{2}x+3} , \quad 18) f(x) = e^{2x} - 9e^x + 4x + 1$$

$$19) f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} , \quad 20) f(x) = \frac{x+1}{x-1}e^x$$

$$21) f(x) = (x+12)e^{\frac{1}{x}} , \quad 22) f(x) = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

مسائل أسية مقترحة للحل

مسألة 1

I. دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث: $f(x) = 2x - 1 + e^{-x} + 2e^{\frac{x}{2}}$

(c) هو الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1- أدرس تغيرات الدالة f . (ب) استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 2$.

2- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

(ب) برهن أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في

جوار $(+\infty)$. (ج) أنشئ المنحني (c).

3) أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x = 0, \quad x = 2 \ln 2, \quad y = 2x - 1$$

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = x^2 - x - e^{-x} - 4e^{\frac{x}{2}}$

1- أ) تحقق أن: $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = e^{-x} \left(x^2 e^x - x e^x - 4e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. (ج) أدرس تغيرات الدالة g (يمكنك استعمال نتائج السؤال 1

2- أ) برهن بأن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1; 2[$.

(ب) برهن بأن المنحني (Γ) للدالة g يقبل في جوار $(+\infty)$ منحني مقارب يطلب تعيينه

3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ) .

4) أنشئ في معلم جديد متعامد ومتجانس المنحني (Γ)

مسألة 2

لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x) = (2x^2 - 7x + 5)e^x$

ليكن (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1) برهن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ (يمكنك وضع $x = 2u$)

(2) أدرس تغيرات الدالة f . 3-1) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع محور الفواصل
 ب) عين معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ج) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . 4) أنشئ المنحني (c)

5-1) عين دالة أصلية للدالة f من الشكل : $x \rightarrow (ax^2 + bx + c)e^x$ حيث a, b, c

اعداد حقيقية يطلب تعيينها . ب) أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (c)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$, $x = 1$, $x = \lambda$ حيث $\lambda \leq 1$

ج) أحسب : $S(-4)$. د) أحسب : $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

مسألة 3

f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ : $f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$.

(c) ممثلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة $2cm$) .

1) ادرس تغيرات الدالة f . 2-أ) برهن أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب (D)

يطلب إعطاء معادلته . ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D) .

3) نعتبر المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

حين x_0 حتى يكون (Δ) يوازي (D) ثم أكتب معادلة (Δ) في هذه الحالة .

4-أ) بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف . ب) أرسم (c) و (Δ) في نفس المعلم

9) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (D_m) ذو

المعادلة : $y = -x + m$.

10) عدد طبيعي . أ) أحسب المساحة $S(n)$ المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات

التي معادلاتها : $y = -x + 1$, $x = \ln(n+1)$, $x = \ln(n)$

ب) نضع : $\alpha_n = S(1) + S(2) + \dots + S(n)$. أحسب α_n بدلالة n .

مسألة 4

لكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس . 1) أدرس تغيرات الدالة f .

2-أ) برهن أن المنحني (c) يقطع (xx') في النقطة ذات الفاصلة x_0 حيث $x_0 \in]1; 2[$

ب) أحسب $f(-x) + f(x)$ ثم استنتج خاصية مميزة للمنحني (c) .

3- (أ) برهن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -1$. (ب) استنتج معادلة المستقيم المقارب

المائل للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$. (ج) برهن أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$

مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$. (د) أنشئ المنحني (c) .

(5) أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (c) والمسقيمت التي معادلاتها :

$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S(\lambda)$ (ب) أحسب $\lambda \in]0; 1[$ حيث $x = 1$, $x = \lambda$, $y = 0$

مسألة 5

لتكن g الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1- (أ) أدرس تغيرات الدالة g . (ب) أحسب $g(0)$

(ج) استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 0$

(2) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (2x-3)e^{2x} + 4e^x - 1$ وليكن (c) المم

البياني لها في معلم متعامد ومتجانس . (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 4e^x \times g(x)$. (ج) أعطي جدول تغيرات الدالة

(3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (4) أرسم المنحني (c)

(5) تحقق بأن الدالة h المعرفة بـ : $h(x) = (x-2)e^{2x} + 4e^x$ هي دالة أصلية للدالة

$(2x-3)e^{2x} + 4e^x$. (ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحني (c)

والمستقيمت التي معادلاتها : $x = 0$, $x = -\ln 2$, $y = -1$

مسألة 6

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}$ وليكن (c) تمثيلها البياني.

في معلم متعامد ومتجانس .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (لاحظ أن : $f(x) = e^x \left(1 - 2e^{-\frac{x}{2}} \right)$)

(2) أدرس تغيرات الدالة f . (3) بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينه

4- (أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (ب) عين نقاط تقاطع (c) مع (x, x')

(ج) أرسم المنحني (c) . (5) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصورة بين

المنحني (c) ومحوري الفواصل والترتيب والمستقيم ذو المعادلة $x = 2 \ln 2$

(1) نعتبر المعادلة التفاضلية : $y - 2y' = -e^x \dots (*)$ (أ) تحقق أن الدالة f هي

هل للمعادلة $(*)$. نضع $y = g + f$ حيث g دالة عددية للمتغير الحقيقي x .

(ب) بين أن $g' - 2g = 0$ ثم حل هذه المعادلة واستنتج حلول المعادلة $(*)$

مسألة 7

لكن f الدالة العددية المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-x}$ وليكن (c) المنحني البياني

لها في معلم متعامد و متجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$ (طول الوحدة $2cm$) .

1- أ) أحسب $f'(x)$. (ب) أدرس تغيرات الدالة $f'(x)$ واستنتج أن

المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حل وحيد $0,5[; 0,4] \alpha \in$.

ج) ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$.

د) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

3) ابرهن أن المنحني (c) يقبل منحني مقارب (Γ) يطلب تعيينه .

ب) ادرس وضعية (c) بالنسبة إلى (Γ) . (ج) بين أن : $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - 3$

4) انشئ المنحني (c) .

9- أ) أحسب : $S(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) - (x^2 - 3) dx$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^{++}$.

ب) فسر هندسيا النتيجة . (ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

مسألة 8

لعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$

لرمز بـ (c) لمنحني الدالة f في مستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس .

1) أثبت أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

ب) ادرس تغيرات الدالة f $f(x) = xe^{2x} \left[1 - \frac{1}{2x} - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{xe^x} - \frac{2}{xe^{2x}} \right]$

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

ب) اثبت أن المنحني (c) يقطع (xx') في نقطة وحيدة $[-2, -1] x_0 \in$

(ج) أنشئ المنحني (c). (3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد جذور

$$\text{المعادلة: } x(e^x - 4) = (m+2)e^{-x} + \frac{e^x}{2} - 4$$

4- (أ) ليكن $\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب :

$$\int_{\lambda}^0 (x-1)e^x dx \quad , \quad \int_{\lambda}^0 \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} dx$$

(ب) استنتج حساب المساحة $S(\lambda)$ المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x=0$ ، $x=\lambda$ ، $y=-2$. (ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

مسألة 9

I. الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $g(x) = (3-2x)e^x + 2$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث : $\alpha \in]1,68 ; 1,69[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(4) باستعمال التكامل بالتجزئة أوجد على \mathbb{R} دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow (3-2x)e^x$

λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أوجد λ بحيث يكون : $\int_0^{\lambda} g(x) dx = \lambda - 1$

II. الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$

(Γ) هو الممثل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

(1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$

(2) بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 5$. (3) أدرس تغيرات الدالة f

4- (أ) بين أن (Γ) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل نرسم له بالرمز (Δ) .

(ب) أدرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى (Δ) .

5- (أ) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C) في النقطة التي فاصلتها $x=0$

(ب) أرسم المنحني (Γ) .

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x :
 $me^x - 4x + m + 2 = 0$

مسألة 10

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x والمعرفة بـ :
 $f(x) = 3x + 1 + \frac{e^{-x} - 1}{2 - e^{-x}}$

(a) هو التمثيل البياني للدالة f . (1) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(2) عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث :

$\forall x \in D_f : f(x) = 3x + b + \frac{ce^{-x}}{2 - e^{-x}}$ و $\forall x \in D_f : f(x) = 3x + \frac{a}{2 - e^{-x}}$

(3) ادرس تغيرات الدالة f . (4) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c)

(5) حدد وضعية المنحني بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + \frac{1}{2}$.

(6) انشئ (c) , (Δ) . (7) ناقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

(8) أحسب $s(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) $m - 1 = \frac{e^{-\alpha}}{2 - e^{-\alpha}}$.

المستقيمت التي معادلاتها : $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 3x + 1/2$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$

الدوال اللوغاريتمية

• الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

تعريف :

تسمى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية الدالة التي نرسم لها بالرمز \ln والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ العدد $\ln x$.

الخواص الأساسية

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$. من أجل كل عددين حقيقيين x, y من المجال $]0; +\infty[$:

$\ln x = \ln y$ يعني $x = y$ ، $\ln x > \ln y$ يعني $x > y$

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad , \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y \quad , \quad \ln x^n = n \ln x$$

دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية

الاستمرار والاشتقاق :

الدالة $\ln x \rightarrow x$ مستمرة وقابلة الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ، وبصفة عامة إذا كانت الدالة

u موجبة تماما وقابلة الاشتقاق على المجال D فإن من أجل كل $x \in D$:

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln x = 0^- \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{u(x) \rightarrow +\infty} \frac{\ln u(x)}{u(x)} = 0$$

$$\lim_{u(x) \rightarrow 0^+} u(x) \times \ln u(x) = 0, \quad \lim_{u(x) \rightarrow 1} \frac{\ln u(x)}{u(x) - 1}, \quad \lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u(x))}{u(x)} = 1$$

تغيرات الدالة $x \rightarrow \ln x$

نعلم أن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ ، على المجال

$]0; +\infty[$ مشتق الدالة $x \rightarrow \ln x$ موجب تماما ومنه الدالة $x \rightarrow \ln x$ متزايدة تماما
الدالة اللوغاريتم العشري

تعريف : نسمى الدالة اللوغاريتم العشري الدالة التي نرسم لها بالرمز "log" والمعرفة

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \text{على المجال }]0; +\infty[$$

$$\log 1 = 0, \quad \log 10 = 1 \quad \text{ملاحظة :}$$

أمثلة على دراسة الدوال اللوغاريتمية

لندرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

$$f(x) = \ln(1 - \ln x) \quad (2)$$

$$f(x) = \ln|x^2 - x - 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \quad (4)$$

$$f(x) = 1 - x + \ln(x+1)^2 \quad (3)$$

$$f(x) = -\frac{1}{2x+1} + \ln \frac{x+1}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{x}{3} + \ln x - \ln(x-4) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)} \quad (10)$$

$$f(x) = (x-2) + (x-1) \ln \frac{1}{|x-1|} \quad (9)$$

$$f(x) = (x-1) \ln \frac{x}{x-1} + \ln x \quad (12)$$

$$f(x) = x(-1 + \ln x) + \frac{1 + \ln x}{x} \quad (11)$$

الحل

$$f(x) = \ln|x^2 - x - 2| \quad (1)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

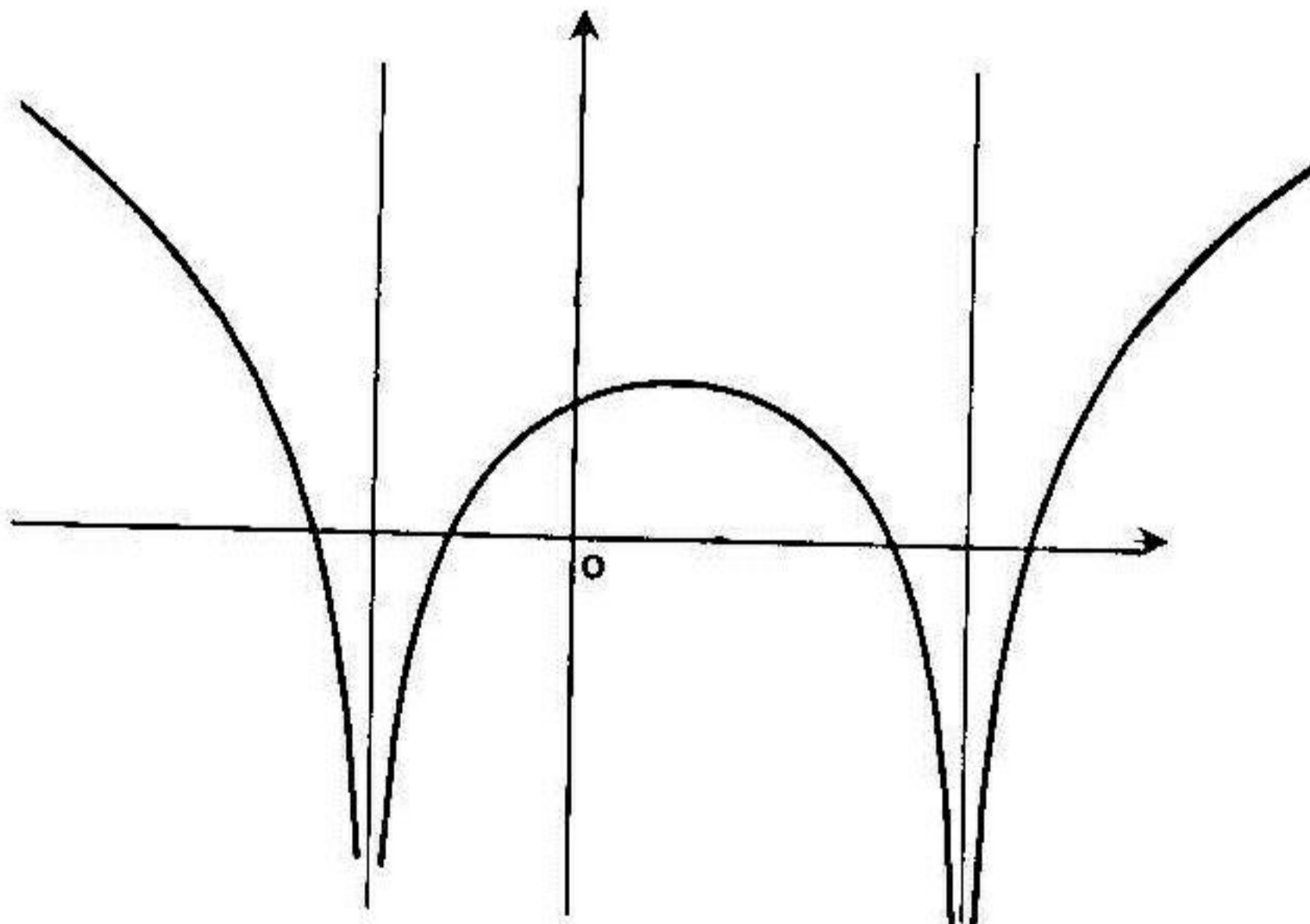
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$1/2$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	○	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$\ln 9/4$	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = -1$ و $x = 2$ مستقيمان مقاربان للمنحني.
- المنحني له فرع من قطع مكافئ في اتجاه $(-x')$ في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني



$$f(x) = \ln(1 - \ln x) \quad (2)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]0, e[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$x \xrightarrow{+} 0$$

$$x \xrightarrow{-} e$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

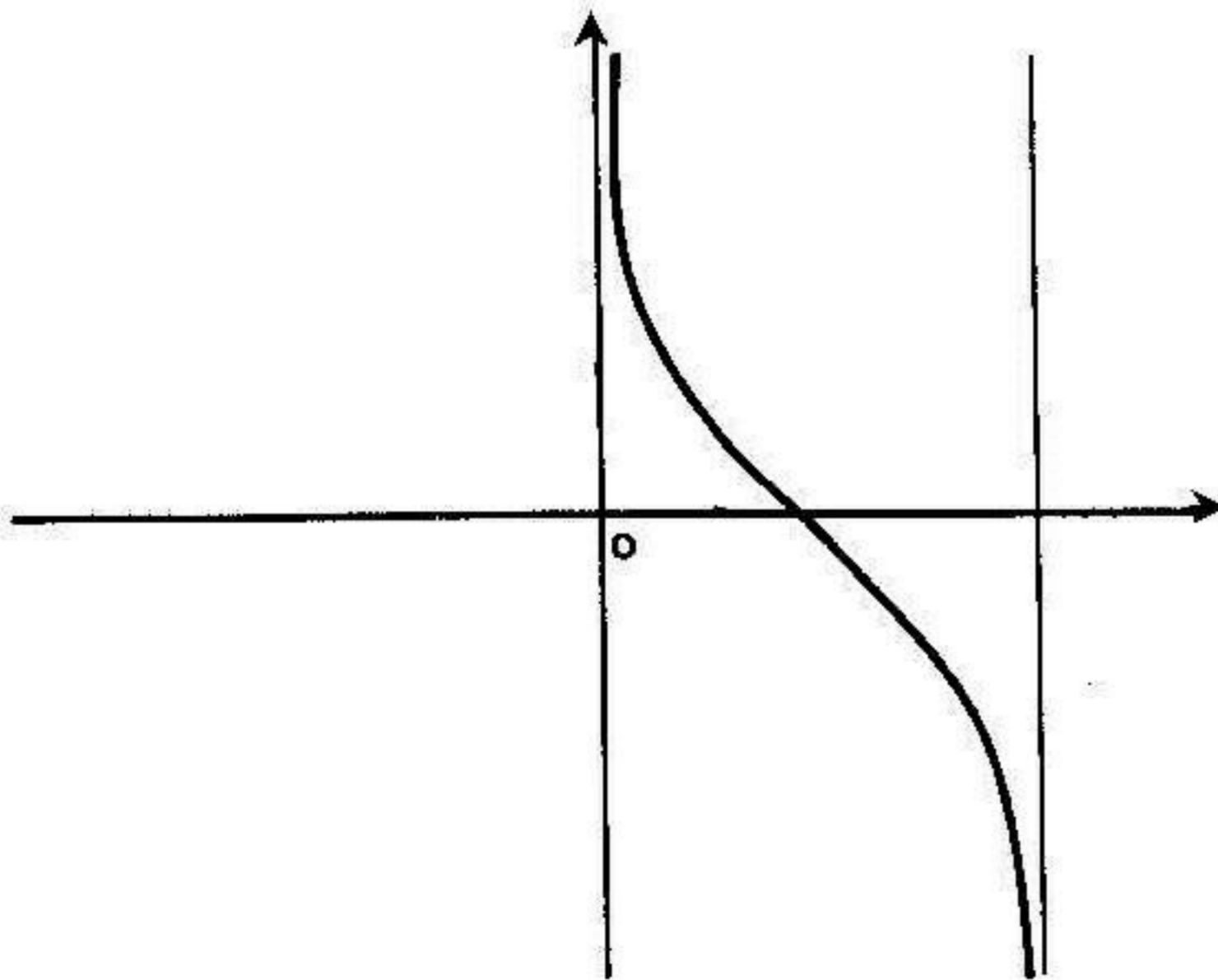
جدول التغيرات :

x	0	e
$f'(x)$		—
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = e$ و $x = 0$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني

المنحني :



$$f(x) = 1 - x + \ln(x+1)^2 \quad (3)$$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$: مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -1$$

: حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

: حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

: جدول التغيرات :

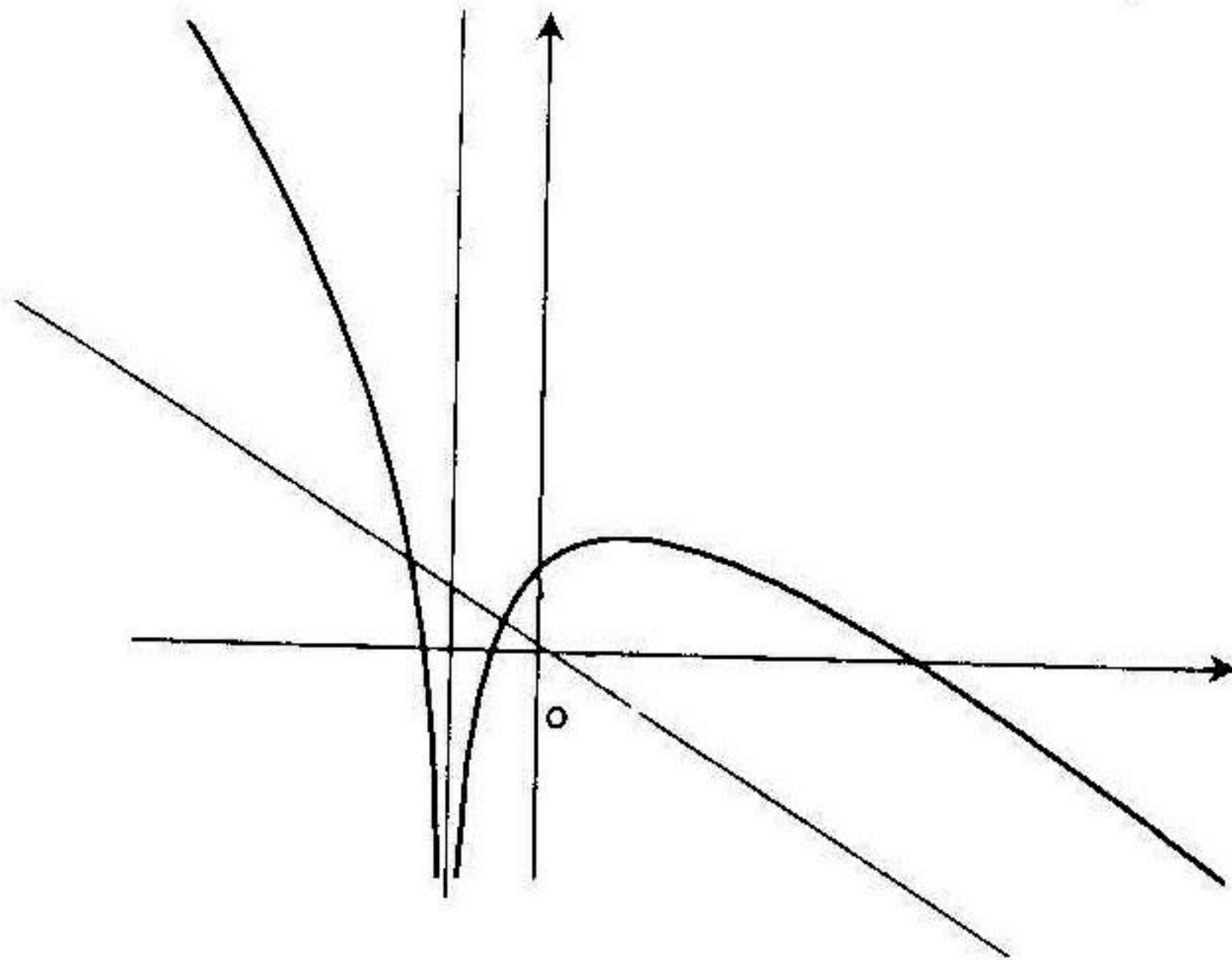
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$2\ln 2$	$-\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى.

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $x = -1$ في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \quad (4)$$

$$D_f =]-1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$x \xrightarrow{x} -1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

جدول التغيرات :

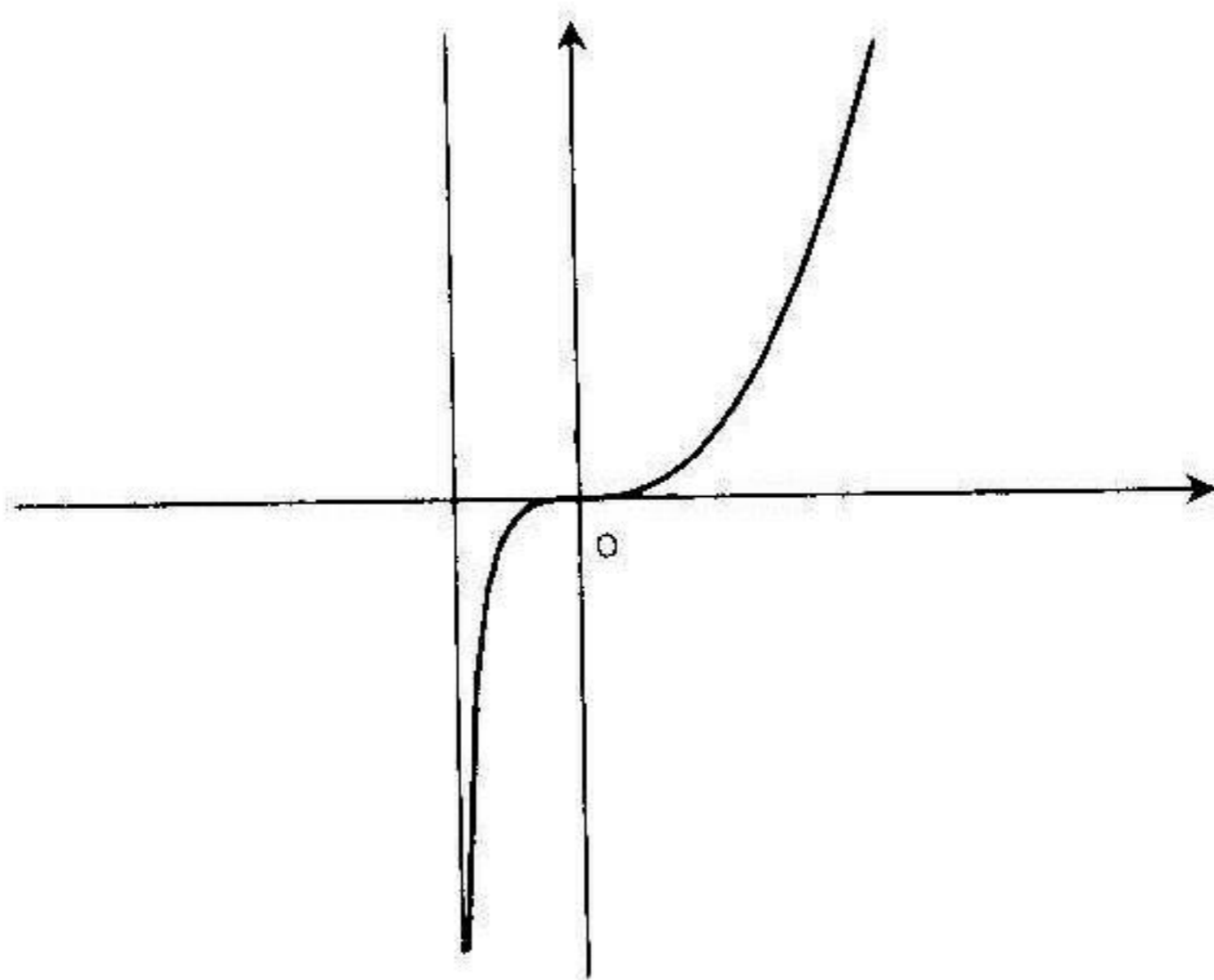
x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى.

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه (\uparrow) في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \quad (5)$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

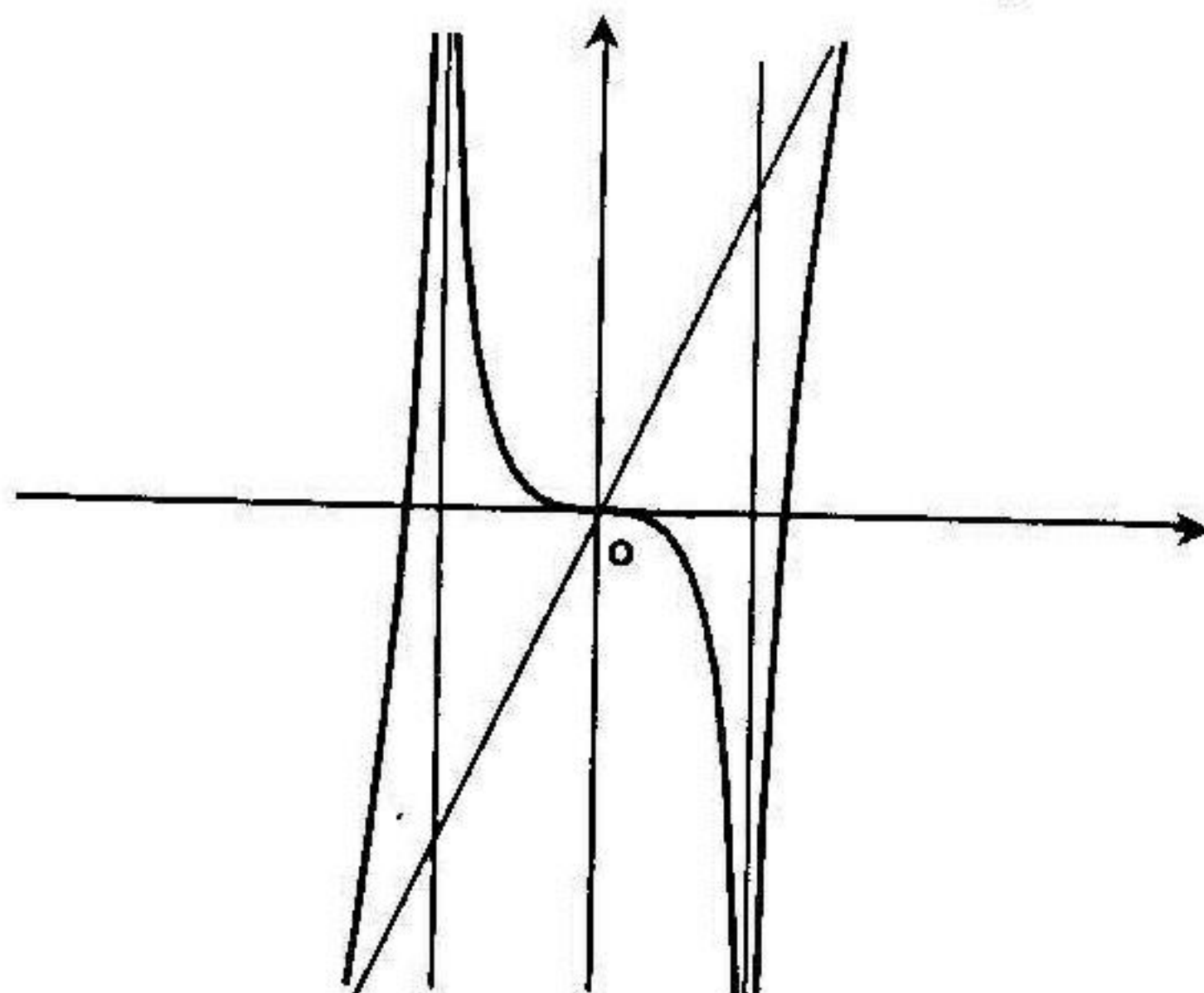
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 1$ و $x = -1$ مستقيمان مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = -\frac{1}{2x+1} + \ln \frac{x+1}{x} \quad (6)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$|x| \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -1^-$$

$$f'(x) = -\frac{2x^2 + 2x + 1}{x(x+1)(2x+1)^2} \quad : x \in D_f \text{ من أجل كل}$$

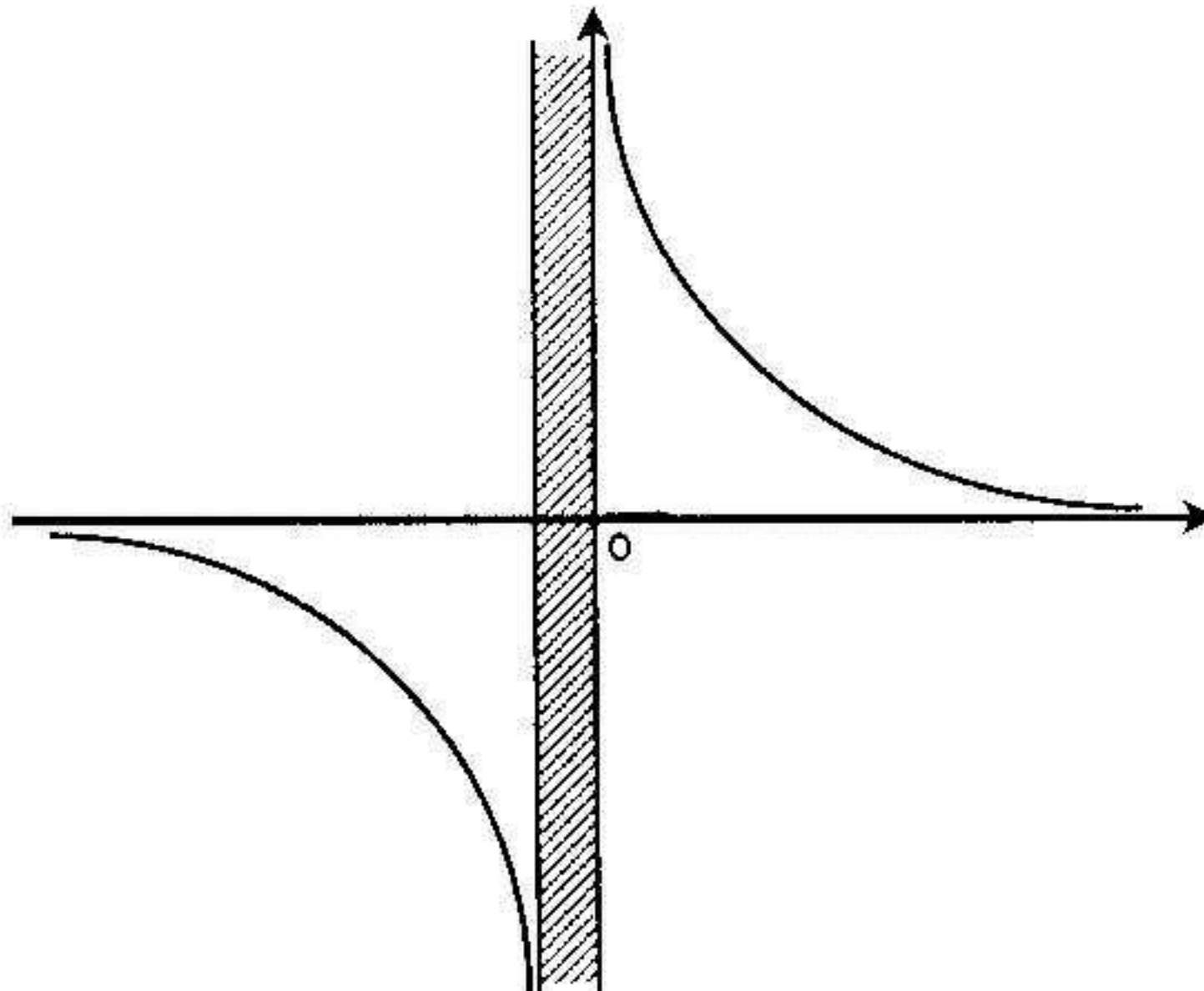
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	—			—
$f(x)$	0 ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ 0

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 0$ و $x = -1$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني
- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = \frac{x}{3} + \ln x - \ln(x-4) \quad (7)$$

$$D_f =]4, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 4^+$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{3x(x-4)}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

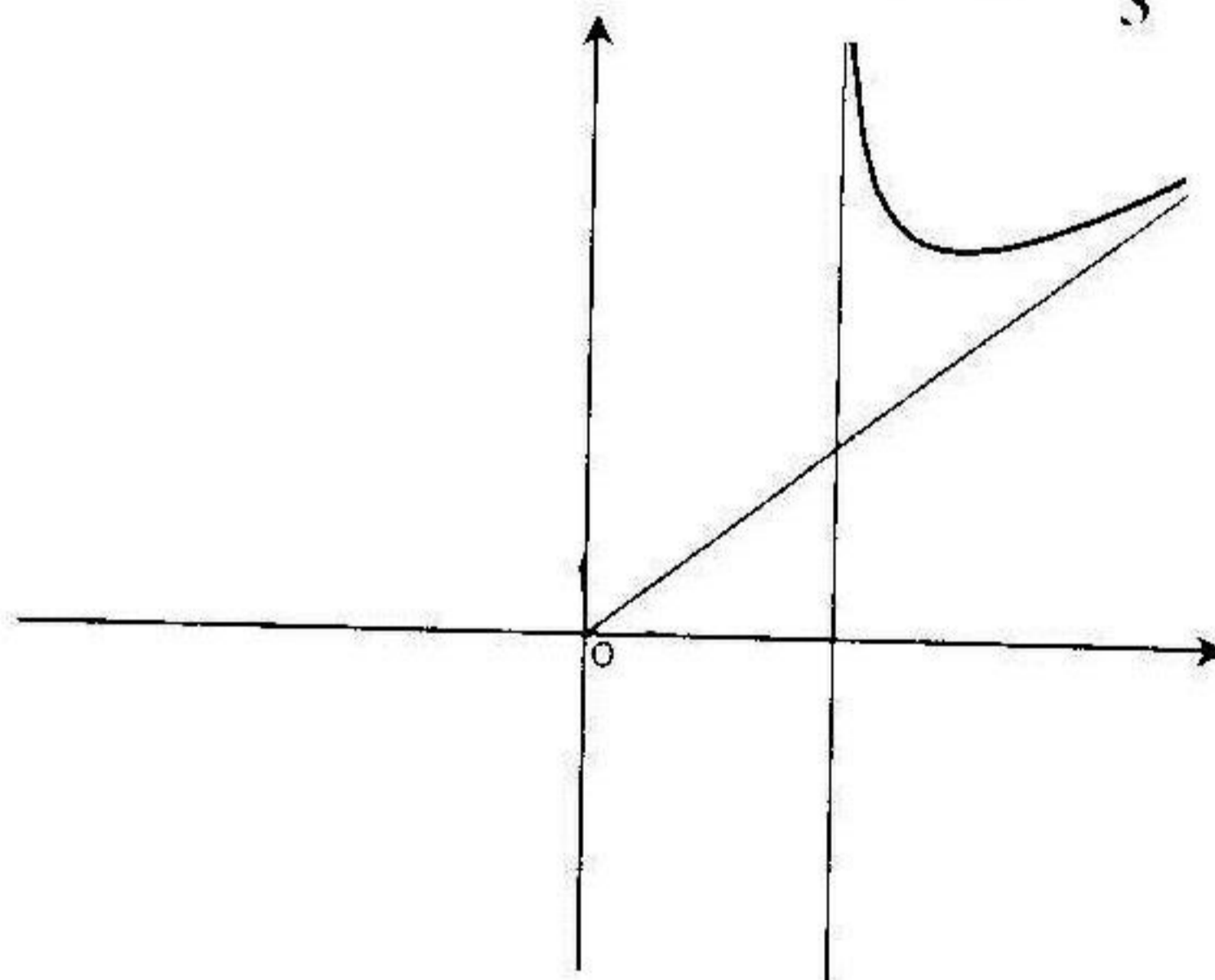
x	4	6	$+\infty$
$f'(x)$		○	
$f(x)$	$+\infty$	$f(6)$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 4$ هو مستقيم مقارب للمنحنى.

- المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{x}{3}$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} \quad (8)$$

$$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow e^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow e^+$$

$$f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

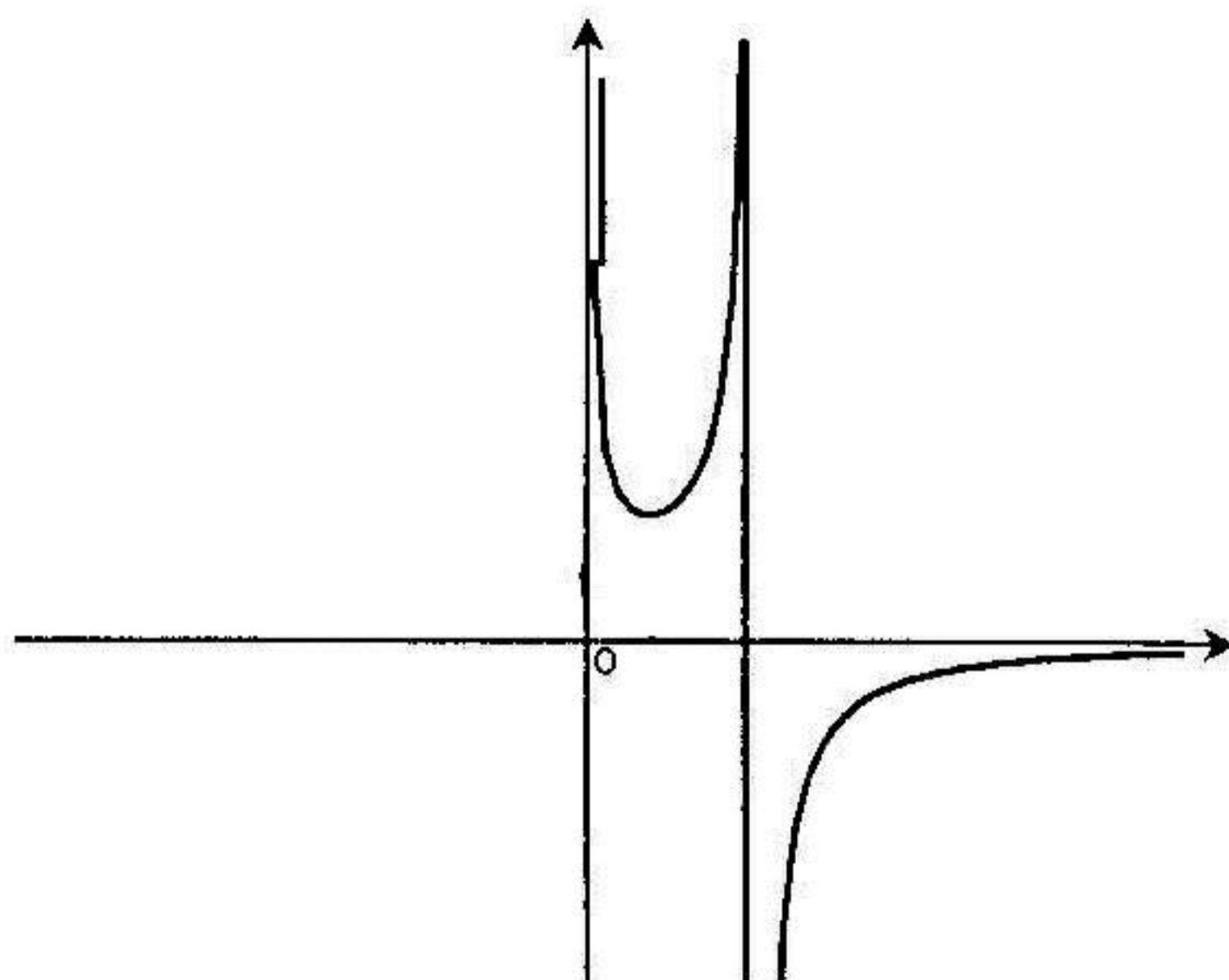
x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = e$ و $x = 0$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = (x-2) + (x-1) \ln \frac{1}{|x-1|} \quad (9)$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

$$x \rightarrow 1$$

$$f'(x) = -\ln|x-1|$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

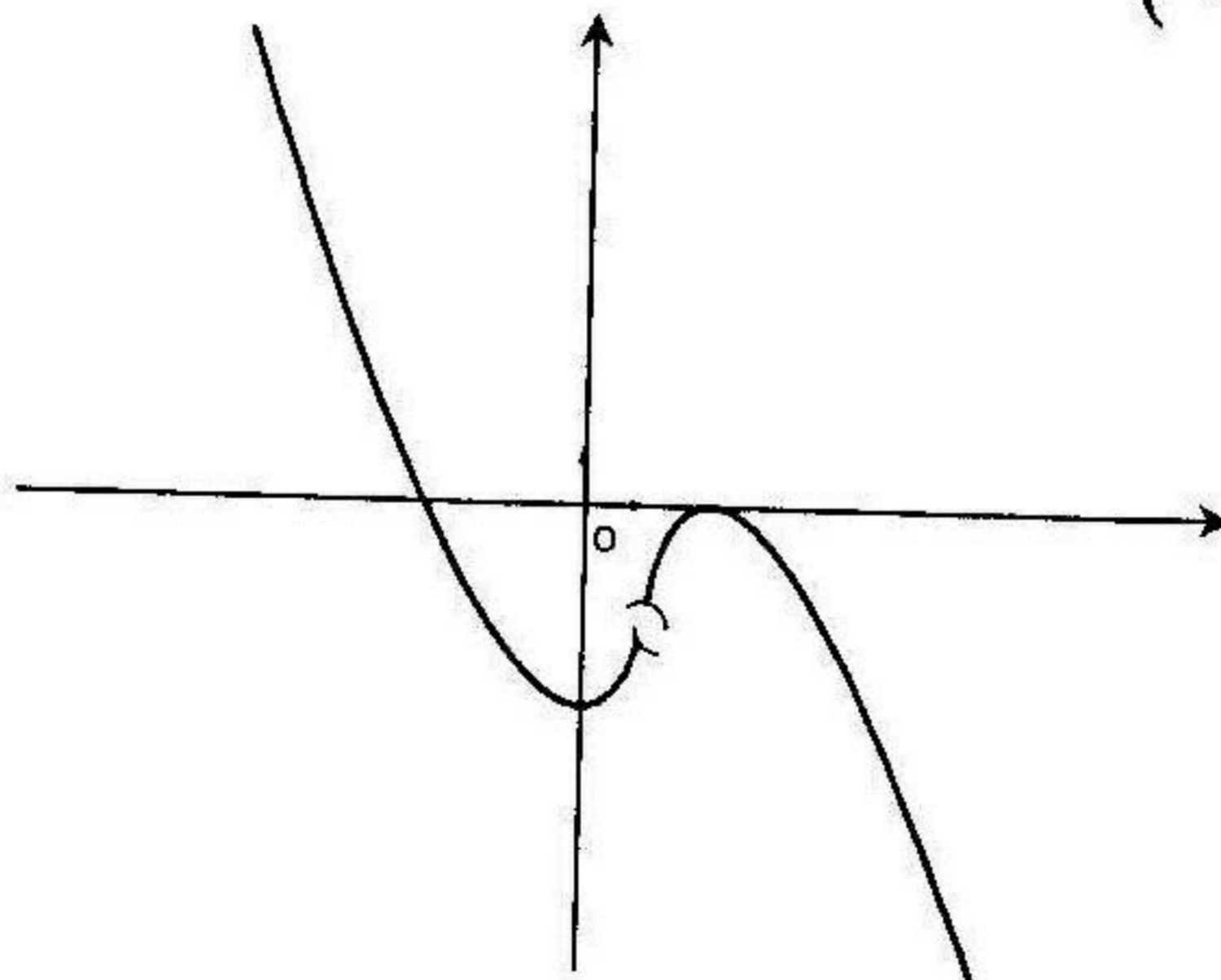
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	+	○	-
$f(x)$	$+\infty$		-1	0		$-\infty$

Diagram showing the behavior of f(x) between critical points: from $-\infty$ to 0 , f(x) decreases from $+\infty$ to -2 ; from 0 to 1 , f(x) increases from -2 to -1 ; from 1 to 2 , f(x) increases from -1 to 0 ; from 2 to $+\infty$, f(x) decreases from 0 to $-\infty$.

الفروع الانتهائية : المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب (yy') في

جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$

المنحني :



$$f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)} \quad (10)$$

$$D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = +\infty$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow e$$

$$f'(x) = \frac{-\ln^2 x + \ln x - 1}{x^2 (\ln x - 1)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

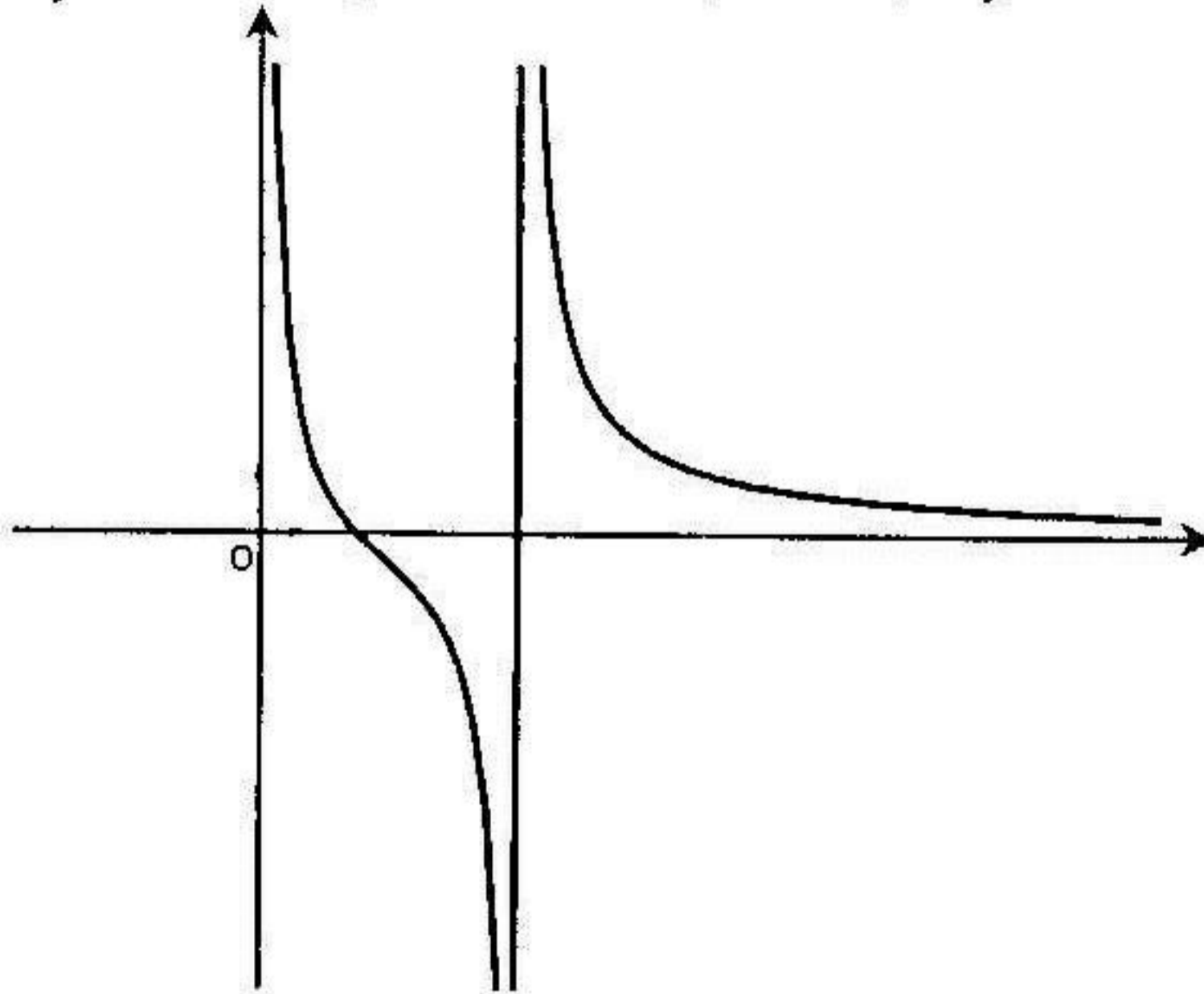
x	0	e	+\infty
f'(x)		-	-
f(x)	+\infty	+\infty	0

الفروع اللانهائية :

- المستقيمان اللذان معادلتهما $x = e$ و $x = 0$ مستقيمان مقاربان للمنحني

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = x(-1 + \ln x) + \frac{1 + \ln x}{x} \quad (11)$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

حساب النهايات : من أجل كل $x \in D_f$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

حساب المشتق :

جدول التغيرات :

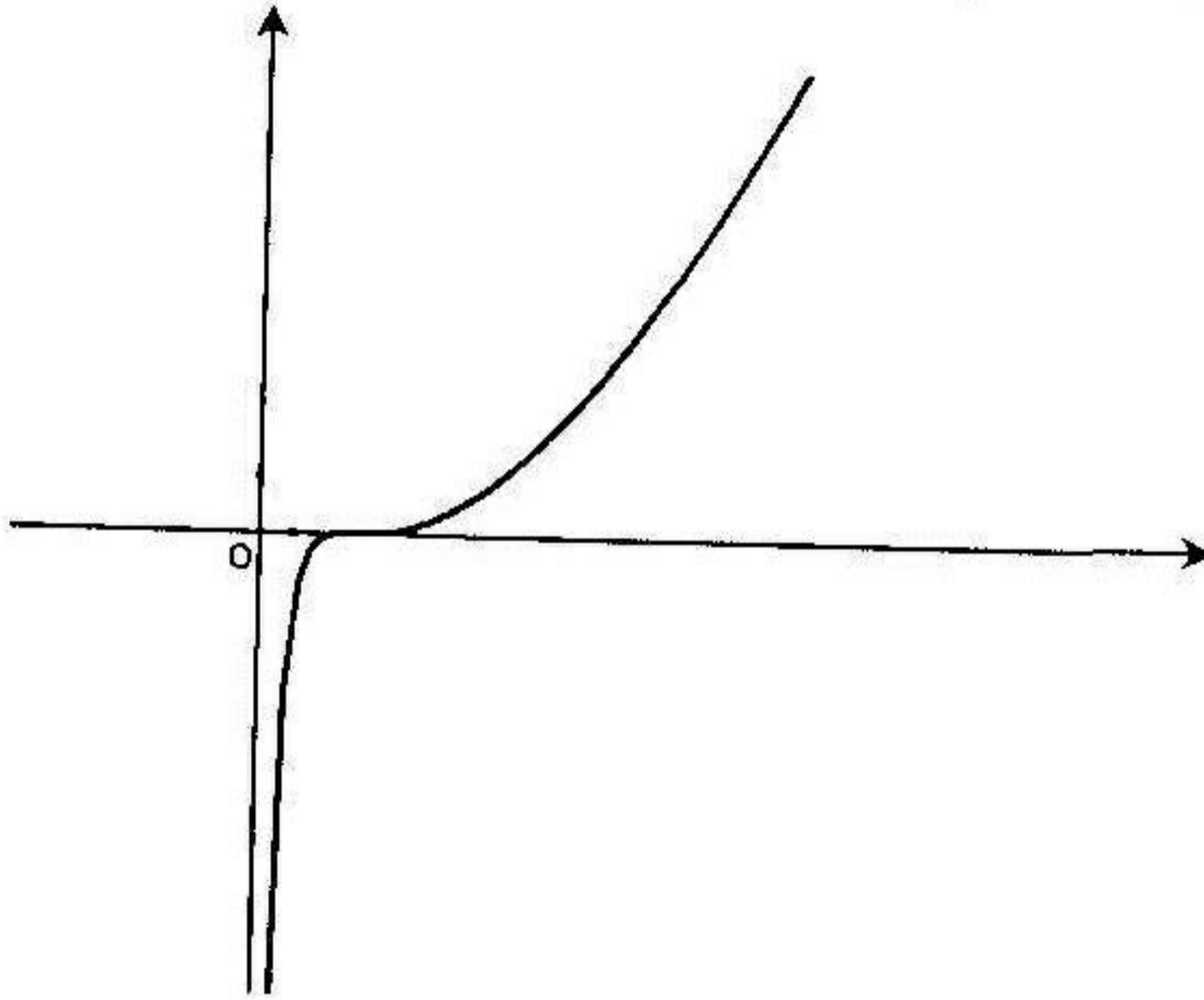
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني.

- المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب (y') في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = (x-1) \ln \frac{x}{x-1} + \ln x \quad (12)$$

$$D_f =]1, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow 1^+$$

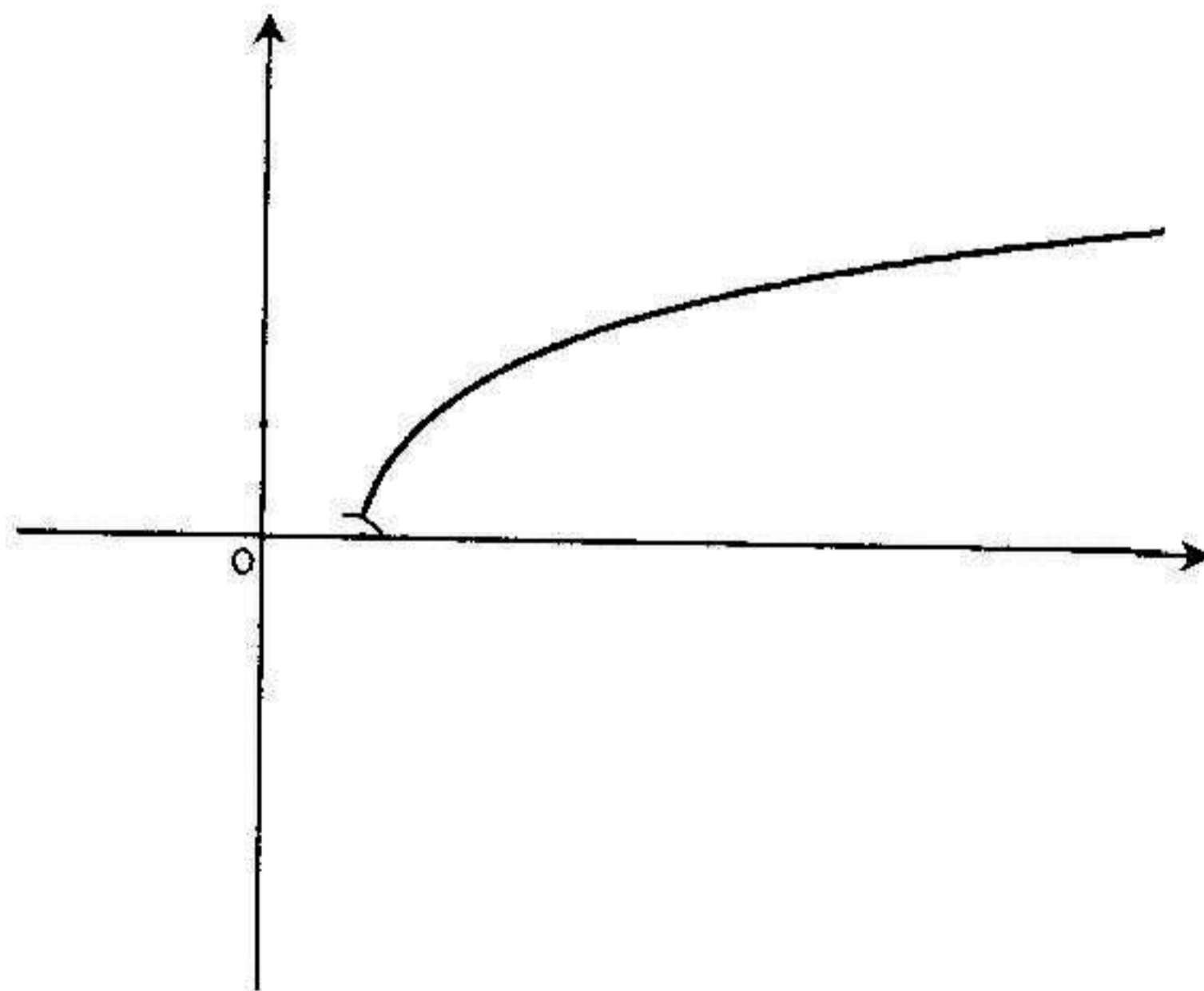
$$f'(x) = \ln \frac{x}{x-1}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

الفروع اللانهائية : المنحني له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل في جوار $(+\infty)$



مسائل محلولة

مسألة 1

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = x - 1 + 2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

نسمى (c) المنحني البياني للدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .
 (1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2-أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيينها .

(ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

(3) أثبت أن النقطة $\omega\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c) .

(4) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1; 2[$.

(5) أرسم المنحني (c) .

(6-أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين على المجال $]-\lambda; +\infty[$ دالة أصلية للدالة :

$\ln|x + \lambda| \rightarrow x$. (ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

(ج) احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) ومحور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = \alpha$ ، $x = 1$.

(د) تأكد أن : $S(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2 \ln \frac{\alpha}{4}$.

II. (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = f(n) - n + 1$

(1) برهن أن (u_n) متتالية متزايدة .

(2) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. احسب S_n بدلالة n ، ثم $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

الحل

I. (1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : تكون الدالة f معرفة إذا كان $\frac{x}{x+1} > 0$ ومنه $x(x+1) > 0$

ومنه : $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty , \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = [x - 1 + 2 \ln|x| - 2 \ln|x+1|]' = 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x^2 + x + 2}{x(x+1)}$$

من أجل $x \in D_f$: $x(x+1) > 0$ و $x^2 + x + 2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2-1 البرهان على أن المنحني (c) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة

لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ إذن المستقيمان اللذان معادلتهما :

$x = -1$ و $x = 0$ هما مستقيمان مقاربان للمنحني (c).

إذن المستقيم (D) ذي $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} 2 \ln \frac{x}{x+1} = 0$

المعادلة $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$.

ب) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (D)

$$f(x) - (x-1) > 0 \text{ ومنه } \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) > 0 \text{ ومنه } \frac{x}{x+1} > 1 \text{ ومنه } \frac{-1}{x+1} > 0$$

ومنه $x+1 < 0$ ومنه $x \in]-\infty; -1[$ ، في هذا المجال يكون المنحني (c) فوق

المستقيم (D). $f(x) - (x-1) < 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، على هذا المجال

يكون المنحني (c) تحت المستقيم (D).

(3) إثبات أن النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

إذا كان $x \in D_f$ فإن $(-1-x) \in D_f$:

$$f(-1-x) + f(x) = -x-2 + 2\ln\frac{x+1}{x} + x-1 + 2\ln\frac{x}{x+1} =$$

$$= -3 + 2\left[\ln\frac{x+1}{x} + \ln\frac{x}{x+1}\right] = -3 + 2\ln\frac{x+1}{x} \times \frac{x}{x+1} = -3 + 2\ln 1 = -3$$

بما أن $f(-1-x) + f(x) = -3$ فالنقطة $\omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

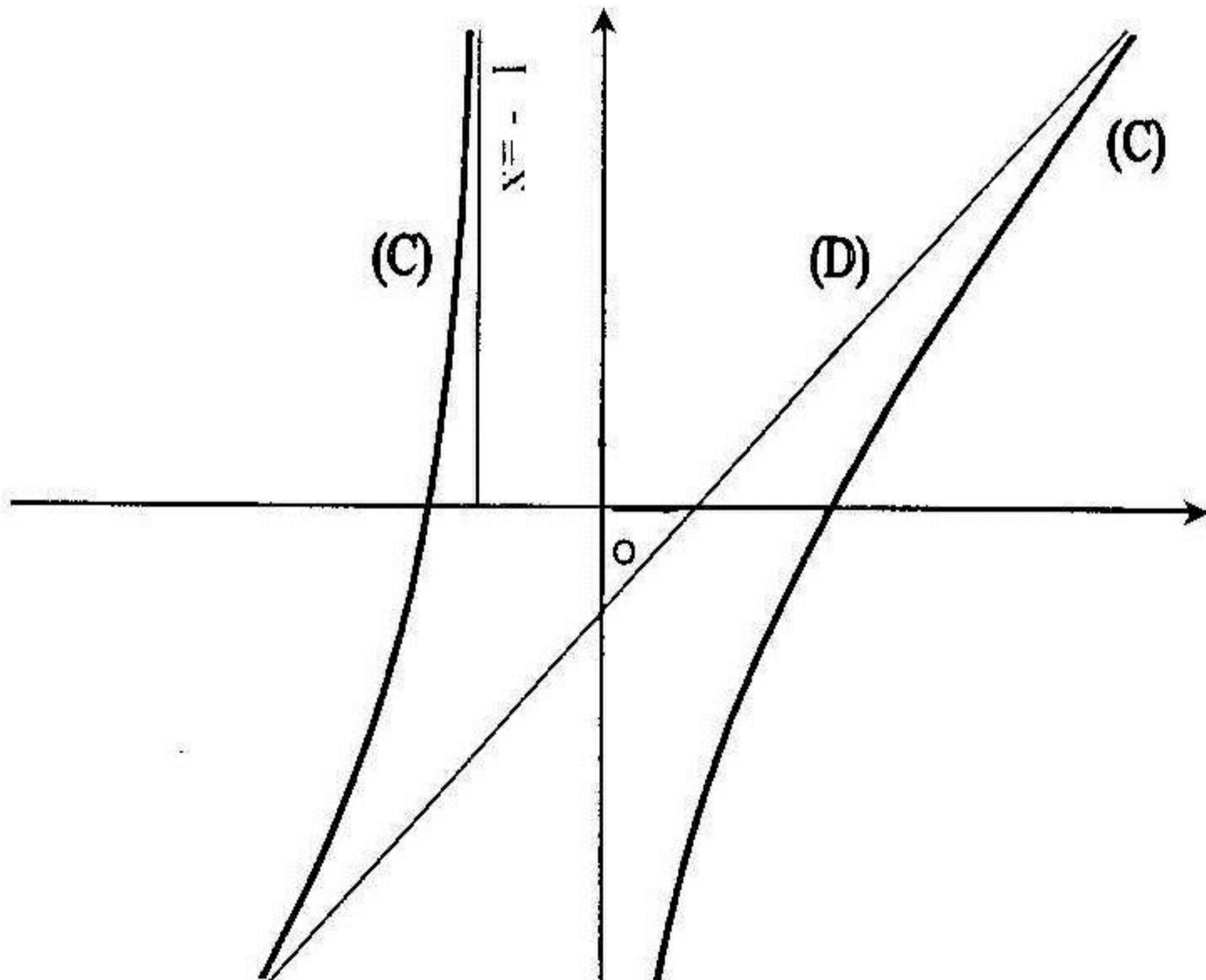
(4) البرهان على أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1; 2[$

على المجال $]1; 2[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما ، ولدينا: $f(1) = -2\ln 2$ و

$f(2) = 1 + \ln\frac{3}{2}$. العدد 0 محصور بين $f(1)$ و $f(2)$ حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1; 2[$.

(5) رسم المنحني (c)



6- أ) تعيين دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln|x + \lambda|$

بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$ و $v(x) = \ln|x + \lambda|$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x + \lambda}$

$$\int \ln|x + \lambda| dx = x \ln|x + \lambda| - \int \frac{x}{x + \lambda} dx = x \ln|x + \lambda| - \int \left(1 - \frac{\lambda}{x + \lambda}\right) dx =$$

$$= x \ln|x + \lambda| - x + \lambda \ln|x + \lambda| + c = (x + \lambda) \ln|x + \lambda| - x + c$$

على المجال $]-\lambda; +\infty[$ تكون الدالة الأصلية للدالة $x \rightarrow \ln|x + \lambda|$ هي :

$$c \in \mathbb{R} \text{ حيث } x \rightarrow (x + \lambda) \ln(x + \lambda) - x + c$$

ب) استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا: $f(x) = x - 1 + 2[\ln x - \ln(x + 1)]$

حسب السؤال السابق وباستبدال $\lambda = 0$ و $\lambda = 1$ في $\int \ln|x + \lambda| dx$ نجد :

$$\int \ln x dx = x \ln x - x \text{ و } \int \ln(x + 1) dx = (x + 1) \ln(x + 1) - x \text{ إذن :}$$

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} - x + 2[x \ln x - x - (x + 1) \ln(x + 1) + x] =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 2[x \ln x - (x + 1) \ln(x + 1)] + c$$

ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x = 1$, $x = \alpha$, $y = 0$

$$S(\alpha) = - \int_1^\alpha f(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x + 2(x + 1) \ln(x + 1) \right]_1^\alpha =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha \ln \alpha + 2(\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) - \left(-\frac{1}{2} + 1 + 4 \ln 2 \right) =$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha \ln \alpha + 2(\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) - \frac{1}{2} - 4 \ln 2$$

د) التأكد أن : $S(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2 \ln \frac{\alpha}{4}$

نعلم أن $f(\alpha) = 0$ أي $\alpha - 1 + 2 \ln \frac{\alpha}{\alpha + 1} = 0$ ومنه

: نجد $S(\alpha)$ في $2 \ln(\alpha + 1)$ وبتعويض $2 \ln(\alpha + 1) = (\alpha - 1) + 2 \ln \alpha$

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha \ln \alpha + (\alpha + 1)[\alpha - 1 + 2 \ln \alpha] - \frac{1}{2} - 4 \ln 2 \\ &= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha - 2\alpha \ln \alpha + (\alpha^2 - 1) + 2\alpha \ln \alpha + 2 \ln \alpha - \frac{1}{2} - 4 \ln 2 \\ &= \frac{\alpha^2}{2} + \alpha - \frac{3}{2} + 2 \ln \alpha - 4 \ln 2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2(\ln \alpha - \ln 4) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 3) + 2 \ln \frac{\alpha}{4} \end{aligned}$$

11. (1) البرهان على أن (u_n) متتالية متزايدة

: $u_n = f(n) - n + 1 = 2 \ln \frac{n}{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$$u_{n+1} - u_n = 2 \left[\ln \frac{n+1}{n+2} - \ln \frac{n}{n+1} \right] = 2 \ln \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} > 1 \text{ لأن} \right) 2 \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) > 0$$

بما أن $u_{n+1} - u_n > 0$ فالمتتالية (u_n) متزايدة .

(2) حساب S_n و $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = 2 \ln \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{2}{3} + \dots + 2 \ln \frac{n}{n+1} = \\ &= 2 \left[\ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln(n) - \ln(n+1) \right] = -2 \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2) \ln(n+1) = -\infty$$

مسألة 2

لتكن الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$

1- (أ) أدرس تغيرات الدالة g . (ب) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(2) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة بـ : $f(x) = x \ln|x-1|$ وليكن (c)

المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس .

(أ) أدرس تغيرات الدالة f . (ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

(ج) بين أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها ثم اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند هذه النقطة .

(د) أحسب إحداثيات نقاط التقاطع بين المنحني (c) والمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

(3) أرسم المنحني (c) . (أ-4) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$$\text{من المجال }]0; 1[\text{ فإن : } \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

(ب) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين على المجال $]0; 1[$ دالة أصلية للدالة f .

(ج) λ عدد حقيقي من المجال $]0; 1[$. أحسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي

المحدد بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلاتها : $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$

(د) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda)$.

الحل

(أ-1) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : $D_g =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

حساب النهايات :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty , \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty , \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$ لدينا :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{-1+(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

جدول التغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	-		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$ $-\infty$ $+\infty$	

ب) حساب $g(0)$ ودراسة إشارة $g(x)$

$g(0) = 0$. من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ و $g(x) < 0$ من أجل $x \in]0; 1[$

2- أ) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة التعريف : $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = g(x)$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول التغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$		0		$+\infty$

Diagram showing the behavior of $f(x)$ near the critical points and asymptotes. Arrows indicate that $f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow 1^+$ and $x \rightarrow +\infty$.

ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln|x-1| = +\infty$$

اتجاه محور الترتيب في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ج) اثبات أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

لدينا $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x)$ ونعلم أن $g'(2) = 0$ إذن

$f''(2) = 0$. بما أن $f''(x)$ تتعدم من أجل $x = 2$ ومغيرا إشارته عند هذه النقطة ،

فالمنحني (C) يقبل نقطة انعطاف وهي النقطة (2;0) . معادلة المماس (Δ)

للمنحني (C) عند النقطة (2;0) هي : $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 2(x-2)$

(د) تعيين إحداثيات نقاط التقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$

فواصل نقاط التقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هي حلول المعادلة:

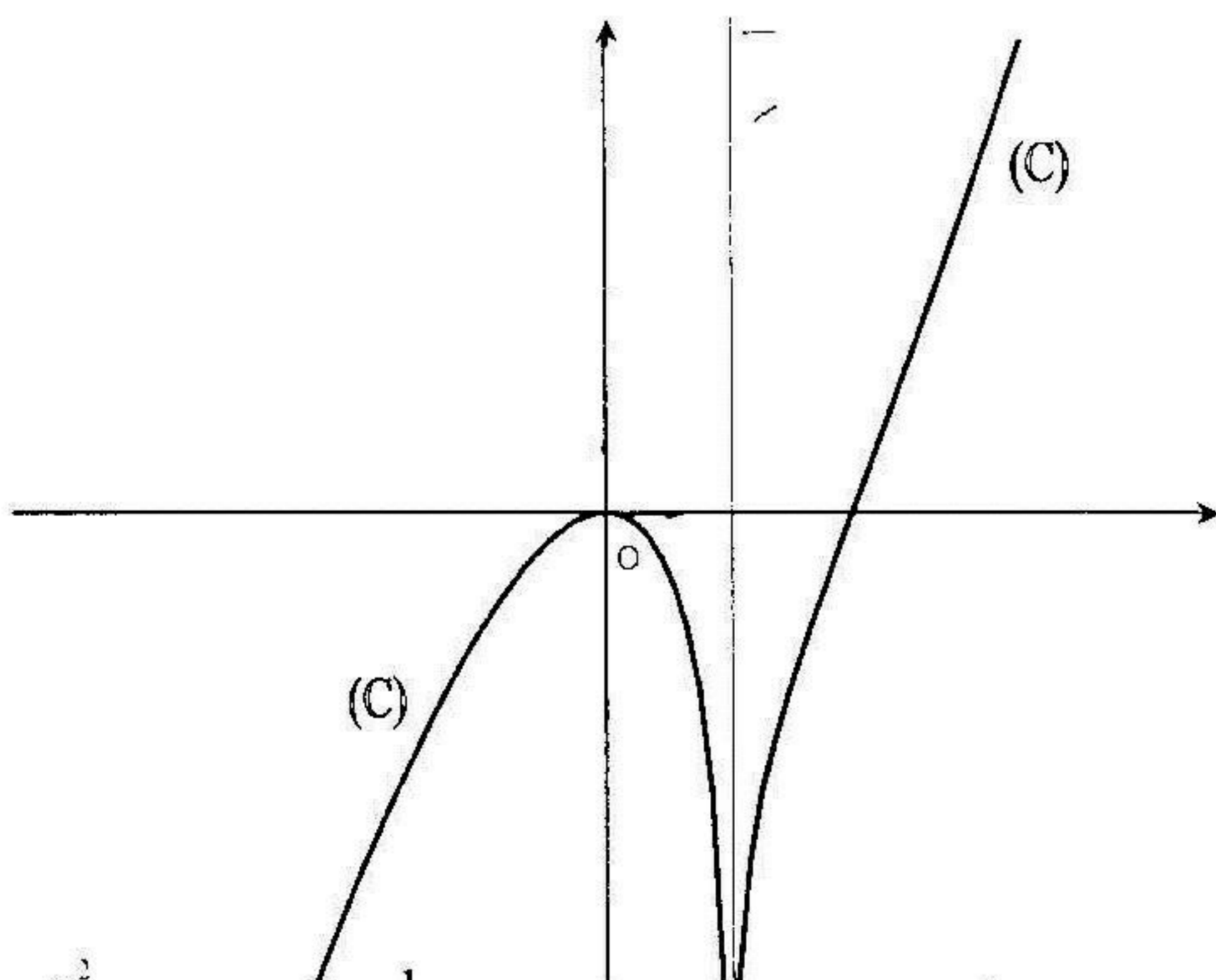
$$f(x) = x \text{ أي } x \ln|x-1| = x \text{ ومنه } x(\ln|x-1| - 1) = 0 \text{ ومنه}$$

$$x=0 \text{ أو } |\ln|x-1|| = 1 \text{ ومنه } (x=0 \text{ أو } |x-1|=e) \text{ ومنه :}$$

($x=0$ أو $x=1-e$ أو $x=1+e$) إذن المنحني (C) يقطع المستقيم $y = x$

في ثلاثة نقاط $(0;0)$, $(1-e;1-e)$, $(1+e;1+e)$

(3) رسم المنحني (C)



١) التحقق من أن على المجال $[0;1[$: $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$

$$x+1 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

(٢) تعيين على المجال $[0;1[$ دالة أصلية للدالة f

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب هذا التكامل $\int f(x) dx = \int x \ln|x-1| dx$

وضع : $u(x) = x^2/2$ ومنه $u'(x) = x$

$$v'(x) = \frac{1}{x-1} \text{ ومنه } v(x) = \ln|x-1| \text{ و}$$

$$\begin{aligned} \int x \ln|x-1| dx &= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x-1} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right] + c \end{aligned}$$

على المجال $[0; 1[$ تكون الدالة الأصلية للدالة f هي:

$$\frac{1}{2}(x^2-1) \ln(1-x) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + c$$

(ج) حساب المساحة $S(\lambda)$

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= - \int_0^\lambda f(x) dx = - \left[\frac{1}{2}(x^2-1) \ln(1-x) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} \right]_0^\lambda = \\ &= \frac{1}{2}(1-\lambda^2) \ln(1-\lambda) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} \quad (u.a) \end{aligned}$$

(د) حساب $\lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda)$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1}{2}(1-\lambda^2) \ln(1-\lambda) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{1}{2}(1+\lambda)(1-\lambda) \ln(1-\lambda) + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ &\quad \left(\lim_{\lambda \rightarrow 1} (1-\lambda) \ln(1-\lambda) = 0 \text{ لأن } \right) \end{aligned}$$

مسألة 3

1. g دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x ومعرفة بـ: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2-أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$

(ب) بين أن $2 < \alpha < 1,8$. (3) استنتج إشارة $g(x)$.

11. لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$. نسمي (c) تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

(2- أ) بين أن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$

(ب) استنتج تغيرات الدالة f . (ج) بين أن $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم أعطي حصرا

لـ $f(\alpha)$. (3) أنشئ المنحني (c) .

(4) نعتبر S مساحة الحيز للمستوي الممثل بمجموعة النقاط $M(x; y)$ حيث:

(أ) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 3/2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x أكبر أو يساوي 1 فإن :

(ب) أحسب $u = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx$. $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

(ج) باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب $v = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx$ ثم استنتج حصرا

للعدد $p = \int_1^{3/2} f(x) dx$. (د) عبر عن S بدلالة p واستنتج حصرا لـ S .

الحل

1. (أ) دراسة تغيرات الدالة g

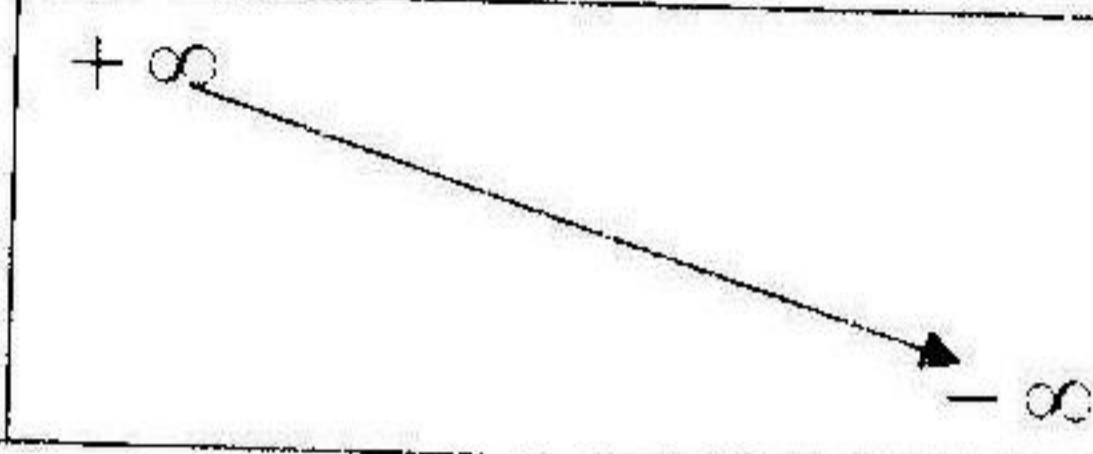
مجموعة تعريف : $D_g =]0; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$ لدينا :

$$g'(x) = \frac{2x+1-2(x+1)}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = - \left[\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x} \right] < 0$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$		$+\infty$ 

2- أ) إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ على المجال $]0; +\infty[$ الدالة g مستمرة ومنتقصة تماما .

ندينا : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

العدد 0 ينتمي إلى المجال $] -\infty; +\infty [$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]0; +\infty[$.

ب) إثبات أن $1,8 < \alpha < 2$

$g(2) = -0,09$ ، $g(1,8) = 0,02$ و $g(\alpha) = 0$ ، العدد 0 محصور بين $g(2)$

و $g(1,8)$ ، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة العدد α ينتمي إلى المجال $]1,8; 2[$

3) استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول التغيرات للدالة g نستنتج أن : $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; \alpha[$

$g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]\alpha; +\infty[$

II . 1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ مع التفسير الهندسي

إذن المستقيم (محور الترتيب) هو مستقيم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = -\infty$

مقارب للمنحني (c) . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \times \frac{1}{x+1} = 0$

ومنه المستقيم (محور الفواصل) هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$.

$$2-أ) \text{ البرهان على أن } f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$$

من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - (2x+1) \times 2 \ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(x+1) - 2(2x+1) \ln x}{(x^2+x)^2} =$$

$$= \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times \left(\frac{x+1}{2x+1} - \ln x \right) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$$

ب) تغيرات الدالة f

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فتكون إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ومنه :

$f'(x) > 0$ من أجل كل $x \in]0; \alpha[$ و $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]\alpha; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	○ -
$f(x)$		$f(\alpha)$	$-\infty$

ج) إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ وتعيين حصر $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2 + \alpha} \text{ ونعلم أن } g(\alpha) = 0 \text{ أي } \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln \alpha = 0 \text{ ومنه}$$

$$\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \text{ . وبتعويض عبارة } \ln \alpha \text{ في } f(\alpha) \text{ نجد :}$$

$$f(\alpha) = \frac{2(\alpha+1)}{(\alpha^2+\alpha)(2\alpha+1)} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$$

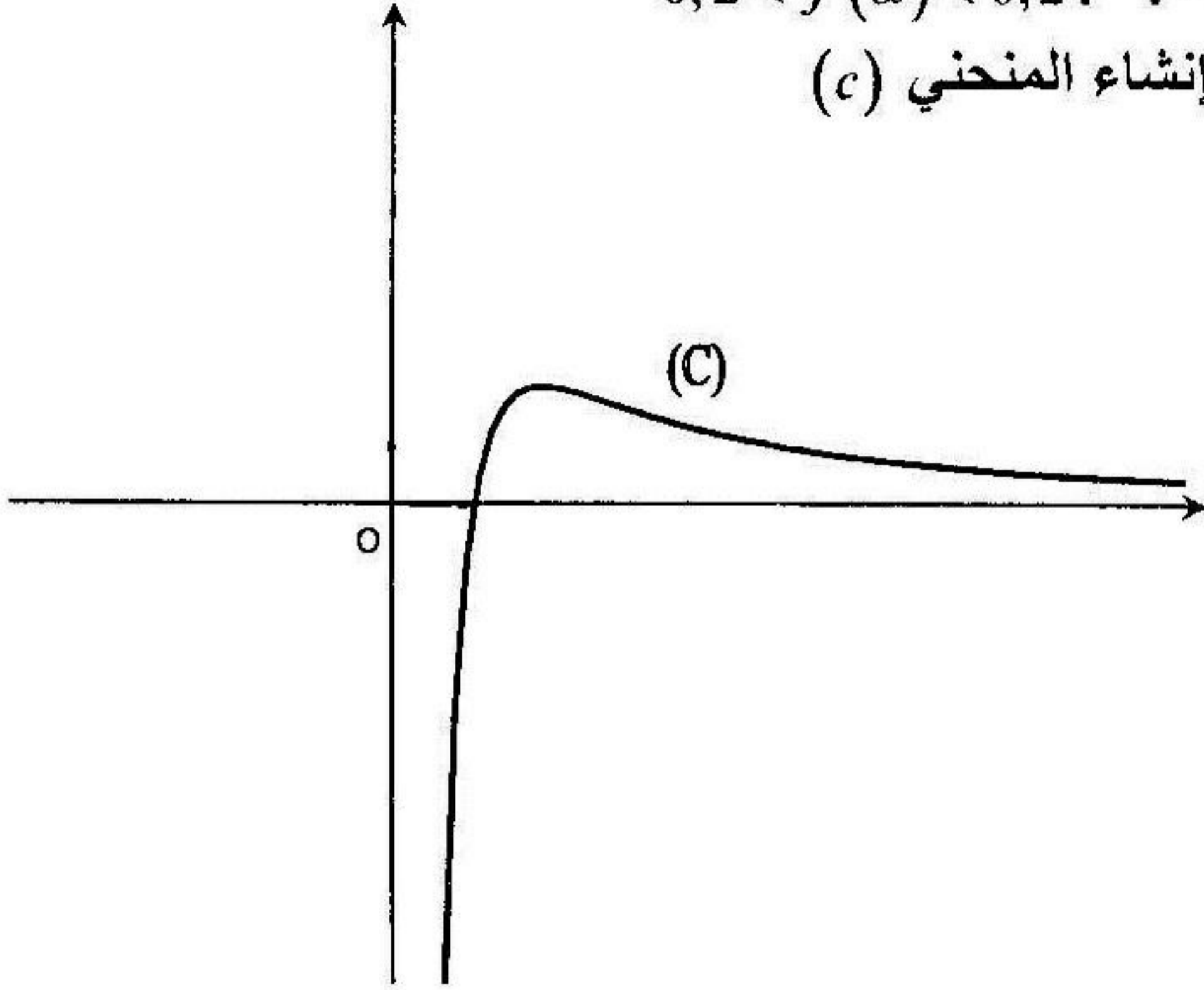
لدينا $1,8 < \alpha < 2$ ومنه $4,6 < 2\alpha + 1 < 5$

ومنه $1,8 \times 4,6 < \alpha(2\alpha + 1) < 2 \times 5$ ومنه $8,28 < \alpha(2\alpha + 1) < 10$ ومنه

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{\alpha(2\alpha + 1)} < \frac{1}{4,14} \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{10} < \frac{1}{\alpha(2\alpha + 1)} < \frac{1}{8,28}$$

ومنه : $0,2 < f(\alpha) < 0,24$

(3) إنشاء المنحني (c)



4- إثبات أن من أجل x أكبر أو يساوي 1 فإن : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

لدينا من أجل x أكبر أو يساوي 1 :

$$f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{2 \ln x}{x(x+1)} - \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\ln x}{x} \leq 0$$

(لأن $\frac{\ln x}{x} \geq 0$ و $\frac{1-x}{1+x} \leq 0$ من أجل x أكبر أو يساوي 1) ومنه $f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

$$f(x) - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x(x+1)} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} \right) =$$

(لأن $\frac{\ln x}{x} \geq 0$ و $\frac{x-1}{x(x+1)} \geq 0$ لما $x \geq 1$) $\frac{x-1}{x(x+1)} \times \frac{\ln x}{x} \geq 0$

ومنه $f(x) \geq \frac{\ln x}{x^2}$ ، إذن ، $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

(ب) حساب $u = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx$

$\int u' u = \frac{u^2}{2}$ (شكل) $\int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{3/2} \frac{1}{x} \times \ln x dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{3/2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$

(ج) حساب بالمكاملة بالتجزئة $v = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx$

بوضع $h'(x) = \frac{1}{x^2}$ و منه $h(x) = -\frac{1}{x}$ و $p(x) = \ln x$ و منه $p'(x) = \frac{1}{x}$

$v = \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^{3/2} + \int_1^{3/2} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right]_1^{3/2} = \frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right)$

استنتاج حصرا للعدد $p = \int_1^{3/2} f(x) dx$

لدينا : $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ و منه $\int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \int_1^{3/2} f(x) dx \leq \int_1^{3/2} \frac{\ln x}{x} dx$

ومنه $v \leq p \leq u$ و منه $\frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq p \leq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$

(د) حساب S بدلالة p

(لأن $u.a = 2cm \times 2cm$) $S = \int_1^{3/2} f(x) dx = p \times (u.a) = p \times 4cm^2$

لدينا $\frac{1}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq p \leq \frac{1}{2} \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$ و منه

$\frac{4}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq S \leq 2 \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$: إذن $\frac{4}{3} \left(1 - 2 \ln \frac{3}{2} \right) \leq 4p \leq 2 \left(\ln \frac{3}{2} \right)^2$

مسألة 4

نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2}$

(1) أدرس تغيرات الدالة g . (2) استنتج إشارة $g(x)$

لتكن الدالة f المعرفة بـ :
$$\begin{cases} f(x) = x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{2} + 1 ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نسمي (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$.

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$ واستنتج أن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$.

4- (أ) هل الدالة g قابلة الاشتقاق على يمين النقطة $x = 0$ ؟ فسر هندسيا النتيجة .

(ب) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$ (يمكنك وضع $\frac{1}{x} = h$ للوصول إلى نهاية شهيرة)

(5) أدرس تغيرات الدالة f (ملاحظة : $f'(x) = g(x)$.

6- (أ) برهن بأن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{x}{2} + 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

(ب) أنشئ المنحني (c) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

8- (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين على المجال $]0; +\infty[$:

$$\int x \times \ln x \, dx , \quad \int x \times \ln(x+2) \, dx$$

(ب) أحسب المساحة $S(\alpha)$ المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$x = \alpha$, $x = 1$, $y = x$ (α هي فاصلة نقطة تقاطع (c) مع المستقيم $y = x$)

الحل

(1) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : g معرفة إذا كان $x > -2$ و $x > 0$ ، إذن $D_g =]0; +\infty[$

حساب النهايات :

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$

$$g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x(x+2) - (x+2)^2 + 2x}{x(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2} < 0$$

جدول التغيرات g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$1/2$

(2) إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_g$.

$$(3) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

(لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$) $\lim_{x \rightarrow 0} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x [\ln(x+2) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} [x \ln(x+2) - x \ln x] = 0$$

استمرارية الدالة f عند $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{2} + 1 \right] = 1 = f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$.

4- (أ) قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ والتفسير الهندسي للنتيجة

$$\text{إذن الدالة } f \text{ غير قابلة} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{2} = +\infty$$

الاشتقاق على يمين $x = 0$ وتفسر هذه النتيجة بأن المنحني (c) يقبل مماسا على يمين 0 يوازي محور الترتيب .

$$\text{(ب) البرهان على أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$$

بوضع $\frac{1}{x} = h$ ومنه $x = \frac{1}{h}$ ولما $x \rightarrow +\infty$ فإن $h \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \times \frac{\ln(1 + 2h)}{2h} = 2 \times 1 = 2$$

(5) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f = [0; +\infty[$

$$\text{حساب النهايات : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \frac{x}{2} + 1 = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = g(x)$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

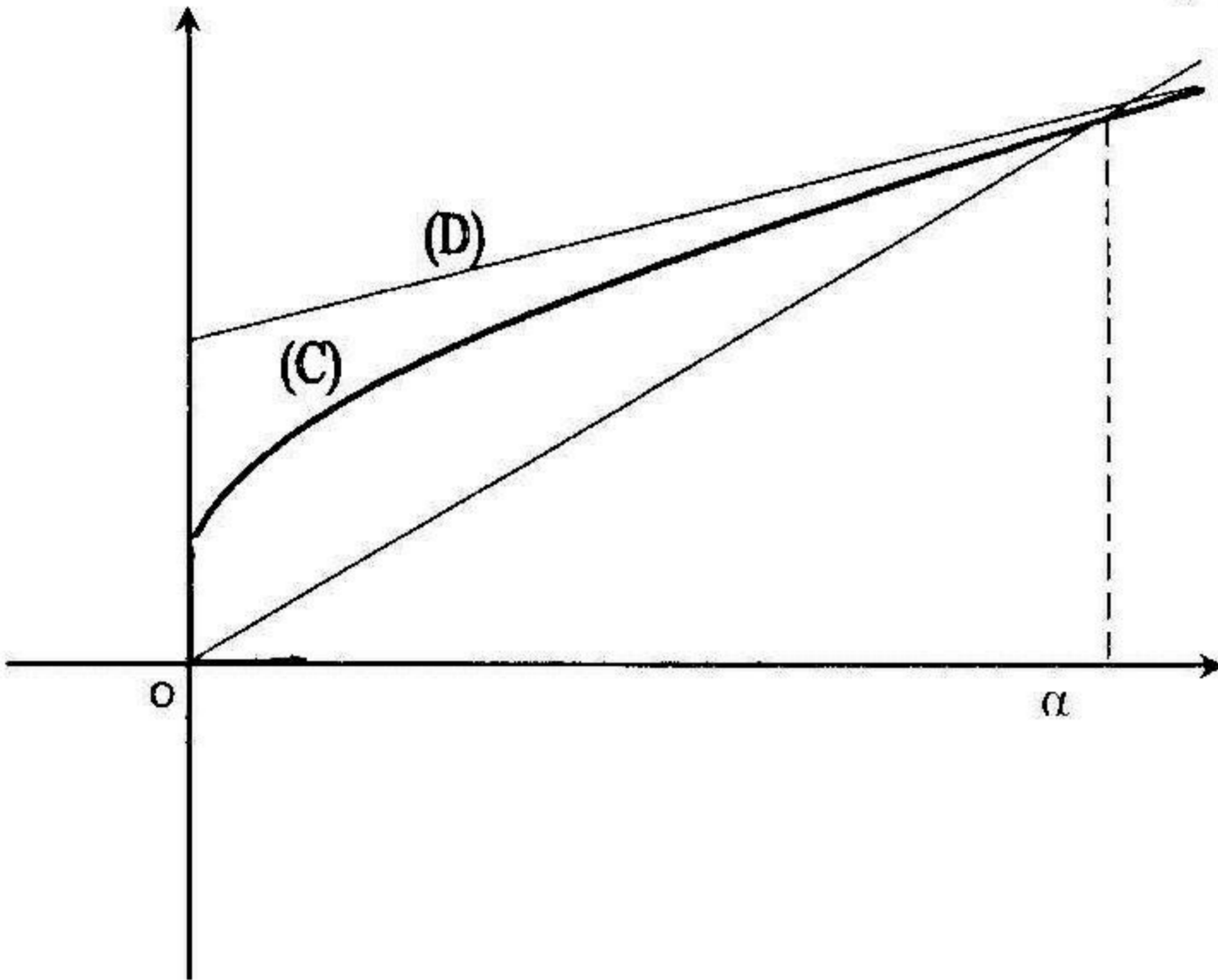
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	1	$+\infty$

6- (أ) البرهان على أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{x}{2} + 3$ هو مستقيم

مقارب للمنحني (c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{x}{2} + 3 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - 2 = 2 - 2 = 0$$

حسب التعريف فالمستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{x}{2} + 3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$
 (ب) رسم المنحني (c).



(7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + m$

المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2} + m$ يوازي المستقيم (D) ويقطع محور الترتيب في النقطة $(0; m)$. من التمثيل البياني للمنحني (c) نلاحظ أنه إذا كان :

$m \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ فإن $(D_m) \cap (c) = \emptyset$ والمعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + m$

ليست لها حلول . إذا كان $m \in]1; 3[$ ، المستقيم (D_m) يقطع (c) في نقطة

وحيدة فإن المعادلة $f(x) = \frac{x}{2} + m$ تقبل حلا وحيدا .

8- أ) تعيين على المجال $]0; +\infty[$: $\int x \ln x dx$, $\int x \ln(x+2) dx$

بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$ و $v(x) = \ln x$ ومنه $\int x \ln x dx$

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \quad . \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$ ، $\int x \ln(x+2) dx$

و $v(x) = \ln(x+2)$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x+2}$

$$\int x \ln(x+2) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \int \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x+2) \right] + c$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) \ln(x+2) - \frac{x^2}{4} + x + c$$

ب) حساب المساحة $S(\alpha)$

$$S(\alpha) = \int_1^\alpha [f(x) - x] dx = \int_1^\alpha \left[x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{x}{2} + 1 \right] dx =$$

$$= \int_1^\alpha \left[x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) - \frac{x}{2} + 1 \right] dx = \int_1^\alpha \left[x \ln(x+2) - x \ln x - \frac{x}{2} + 1 \right] dx$$

$$= \int_1^\alpha x \ln(x+2) dx - \int_1^\alpha x \ln x dx - \int_1^\alpha \frac{x}{2} dx + \int_1^\alpha dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2 \right) \ln(x+2) - \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + 2x \right]_1^\alpha =$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{2} - 2 \right) \ln(\alpha+2) - \frac{\alpha^2}{2} \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + 2\alpha + \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{7}{4} \text{ (u.a)}$$

مسألة 5

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + (x-2) \ln x$

1- أ) احسب $g'(x)$ وبين أن إشارتها هي إشارة $h(x) = 2x - 2 + x \ln x$.

ب) أدرس تغيرات الدالة h واحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج أن : $g(x) \geq 1$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

1) أدرس تغيرات الدالة f . نرسم (c) لمنحني الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم

متعامد ومتجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

2- أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$.

ب) أدرس تغيرات الدالة p المعرفة بـ : $p(x) = x - 1 - \ln x$ ثم استنتج

إشارة $p(x)$. ج) استنتج وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ)

3) أنشئ المنحني (c) .

4- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\alpha = \int_1^e x \ln x dx$, $\beta = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

ب) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$$x = 1, x = e, y = 0$$

الحل

1. حساب $g'(x)$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما

$$g'(x) = 1 + \ln x + \frac{x-2}{x} = \frac{x + x \ln x + x - 2}{x} = \frac{2x - 2 + x \ln x}{x}$$

على المجال $]0; +\infty[$ إشارة $g'(x)$ هي إشارة $h(x) = 2x - 2 + x \ln x$
 ب) دراسة تغيرات الدالة h

مجموعة تعريف: $D_h =]0; +\infty[$

حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته: من أجل كل $x \in D_h$ لدينا: $h'(x) = 3 + \ln x$

$h'(x) = 0$ ومنه $3 + \ln x = 0$ ومنه $\ln x = -3$ ومنه $x = e^{-3}$

$h'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0; e^{-3}[$ و $h'(x) > 0$ من أجل كل $x \in]e^{-3}; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة h :

x	0	e^{-3}	$+\infty$
$h'(x)$	-	○	+
$h(x)$	-2	$f(e^{-3})$	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج ما يلي:

$h(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0; 1[$ و $h(x) > 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

وبما أن إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $h(x)$ فإن:

$g'(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0; 1[$ و $g'(x) > 0$ من أجل كل $x \in]1; +\infty[$

2) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف: $D_g =]0; +\infty[$

حساب النهايات:

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [x + (x-2) \ln x] = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : $g(x) \geq 1$ من أجل كل عدد $x \in]0; +\infty[$
 II. 1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f =]0; +\infty[$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + x \ln x - (\ln x)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x \left[\frac{1}{x \ln x} + 1 - \frac{\ln x}{x} \right]$$

نعلم أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1 + \ln x - 2 \times \frac{\ln x}{x} = \frac{x + x \ln x - 2 \ln x}{x} = \frac{x + (x-2) \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

نعلم أن من أجل كل $x \in D_f$: $g(x) > 0$ و $x > 0$ ، إذن $f'(x) > 0$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2- أ) معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

معادلة المماس (Δ) هي : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = (x-1) + 1 = x$

ب) دراسة تغيرات الدالة p

مجموعة تعريف : $D_p =]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_p$: $p'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$p'(x) < 0$ من أجل $x \in]0; 1[$ و $p'(x) > 0$ لما $x > 1$

جدول تغيرات الدالة p :

x	0	1	$+\infty$
$P'(x)$	-	○	+
$P(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة p نستنتج أن $p(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_p$.

ج) وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المماس (Δ)

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 1 + x \ln x - (\ln x)^2 - x = 1 - (\ln x)^2 - x(1 - \ln x) = \\ &= (1 - \ln x)[1 + \ln x - x] = (\ln x - 1)p(x) \end{aligned}$$

$$f(x) - x = (\ln x - 1)p(x) = 0 \text{ ومنه } \ln x - 1 = 0 \text{ أو } p(x) = 0 \text{ ومنه}$$

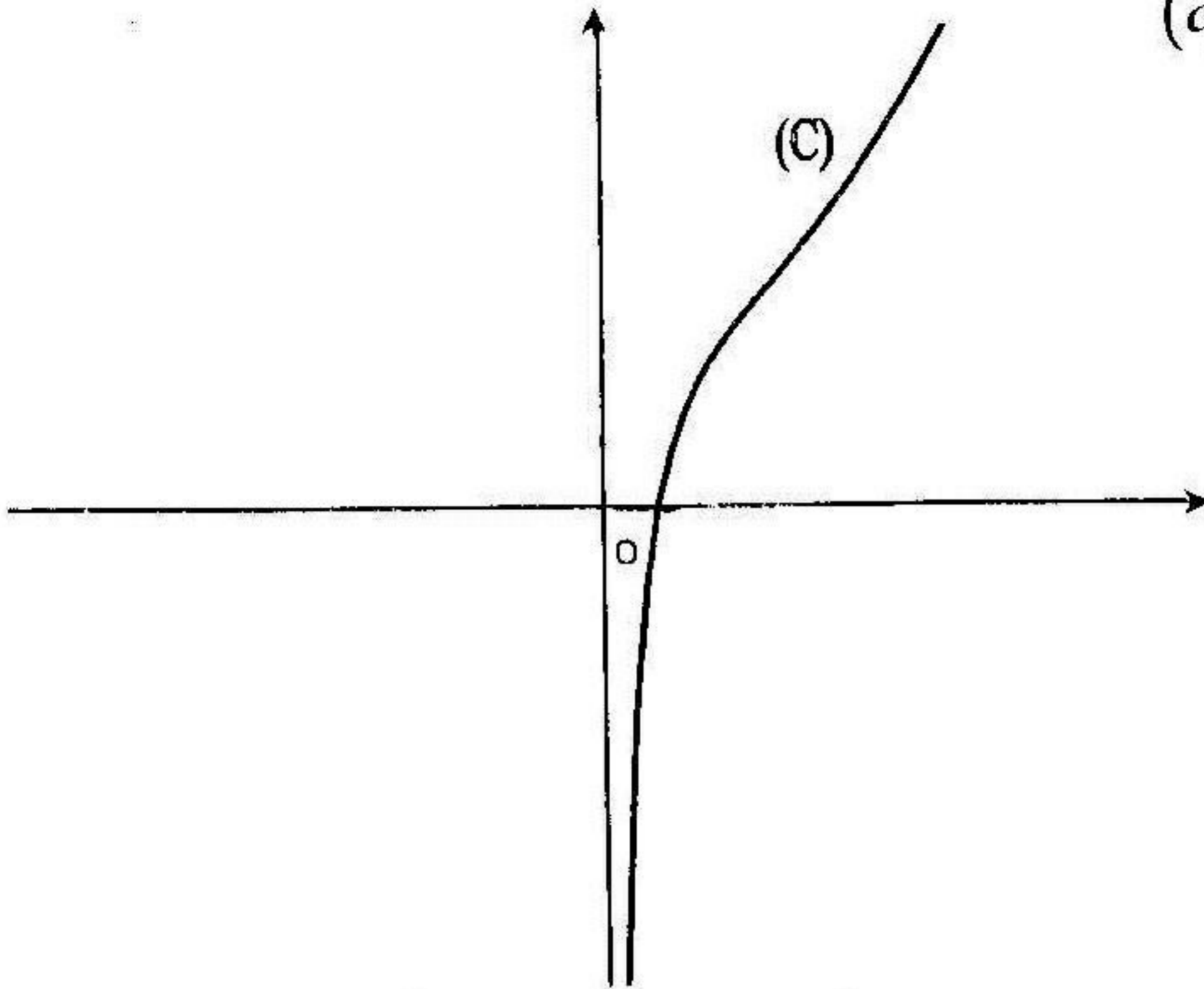
$x = e$ أو $x = 1$. المستقيم (Δ) والمنحني (c) يتقاطعان في نقطتين.

$f(x) - x > 0$ لما $(\ln x - 1) > 0$ ومنه $\ln x > 1$ ومنه $x \in]e; +\infty[$ ، على هذا

المجال المنحني (c) فوق المستقيم (Δ) .

$f(x) - x < 0$ من أجل كل $x \in]0; e[$ ، في هذا المجال المنحني (c) تحت (Δ)

(3) إنشاء المنحني (c)



4- أ) حساب التكاملات : $\alpha = \int_1^e x \ln x dx$, $\beta = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

حساب : $\alpha = \int_1^e x \ln x dx$

بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$ و $v(x) = \ln x$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x}$ ومنه

$$\alpha = \int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

حساب : $\beta = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$ و $v(x) = (\ln x)^2$ ومنه $v'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

$$\beta = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left[x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) \right]_1^e = \left[x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^e = e - 2$$

ب) حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها :
 $x = 1, x = e, y = 0$

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e [1 + x \ln x - (\ln x)^2] dx = \\ &= \int_1^e dx + \int_1^e x \ln x dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx = [x]_1^e + \frac{e^2 + 1}{4} - e + 2 \\ &= \frac{e^2 + 1}{4} + 1 \text{ (u.a)} = 4 \left(\frac{e^2 + 1}{4} + 1 \right) = (e^2 + 5) \text{ cm}^2 \\ &\quad \text{(u.a = 2cm} \times \text{2cm = 4cm}^2 \text{)} \end{aligned}$$

مسألة 6

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = x + 4 + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$. نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$. (1) أدرس تغيرات الدالة f .
- (2) برهن بأن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x + 4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c).
- (3) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) .
- (4-أ) برهن بأن نقطة تقاطع المنحني (c) مع محور الترتيب هي مركز تناظر المنحني (c).
- (ب) أنشئ المنحني (c). (5) m وسيط حقيقي، ناقش تبعاً لقيم m عدد نقاط تقاطع المنحني (c) مع المستقيم (D_m) ذي المعادلة $y = x + m$.
- (6) باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 3, x = 6, y = x + 4$.
- (7) أنشئ في نفس المعلم منحني الدالة g المعرفة بـ:
- $$g(x) = x + 4 + \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

الحل

- (1) دراسة تغيرات الدالة f
مجموعة تعريف: تكون الدالة f معرفة إذا كان $x - 2 \neq 0$ و $x + 2 \neq 0$ أي :
 $D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$: إذن $x \neq 2$ و $x \neq -2$

حساب النهايات :

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-2}{x+2} = \ln 1 = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty.$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$ لدينا :

$$f'(x) = [x+4 + \ln|x-2| - \ln|x+2|]' = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} =$$

$$= \frac{(x^2 - 4) + (x+2) - (x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-2)(x+2)$

$$f'(x) < 0 \text{ من أجل كل } x \in]-2; 2[$$

$$f'(x) > 0 \text{ من أجل } x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(2) البرهان بأن المستقيم (Δ) هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$$\text{إذن المستقيم } (\Delta) \text{ ذي المعادلة } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+4)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-2}{x+2} = 0$$

$y = x + 4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

(3) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ)

$$f(x) - (x+4) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

وضعية (c) بالنسبة إلى (Δ) تتعلق بـ $\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$

$$\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 0 \text{ ومنه } \left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 1 \text{ ومنه } -1 < \frac{x-2}{x+2} < 1 \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{x-2}{x+2} < 1 \text{ و } -1 < \frac{x-2}{x+2} \right) \text{ ومنه } \frac{-4}{x+2} < 0 \text{ و } \frac{2x}{x+2} > 0 \text{ ومنه}$$

$$\left(x \in]-2; +\infty[\text{ و } x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[\text{ ومنه } x \in]0; +\infty[\right)$$

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا $f(x) - (x+4) < 0$ ويكون المنحني (c) تحت (Δ)

$$\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| > 0 \text{ ومنه } \left| \frac{x-2}{x+2} \right| > 1 \text{ ومنه } \left(\frac{x-2}{x+2} > 1 \text{ أو } \frac{x-2}{x+2} < -1 \right) \text{ ومنه}$$

$$\left(\frac{-4}{x+2} > 0 \text{ أو } \frac{2x}{x+2} < 0 \right) \text{ ومنه } \left(x \in]-\infty; -2[\text{ أو } x \in]-2; 0[\right) \text{ ومنه}$$

$$f(x) - (x+4) > 0 \text{ على هذا المجال لدينا } x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 0[$$

ويكون المنحني (c) فوق المستقيم (Δ) .

4- أ) البرهان بأن نقطة تقاطع المنحني (c) مع $(y'y)$ هي مركز تناظر (c) المنحني (c) يقطع $(y'y)$ في النقطة $(0; 4)$

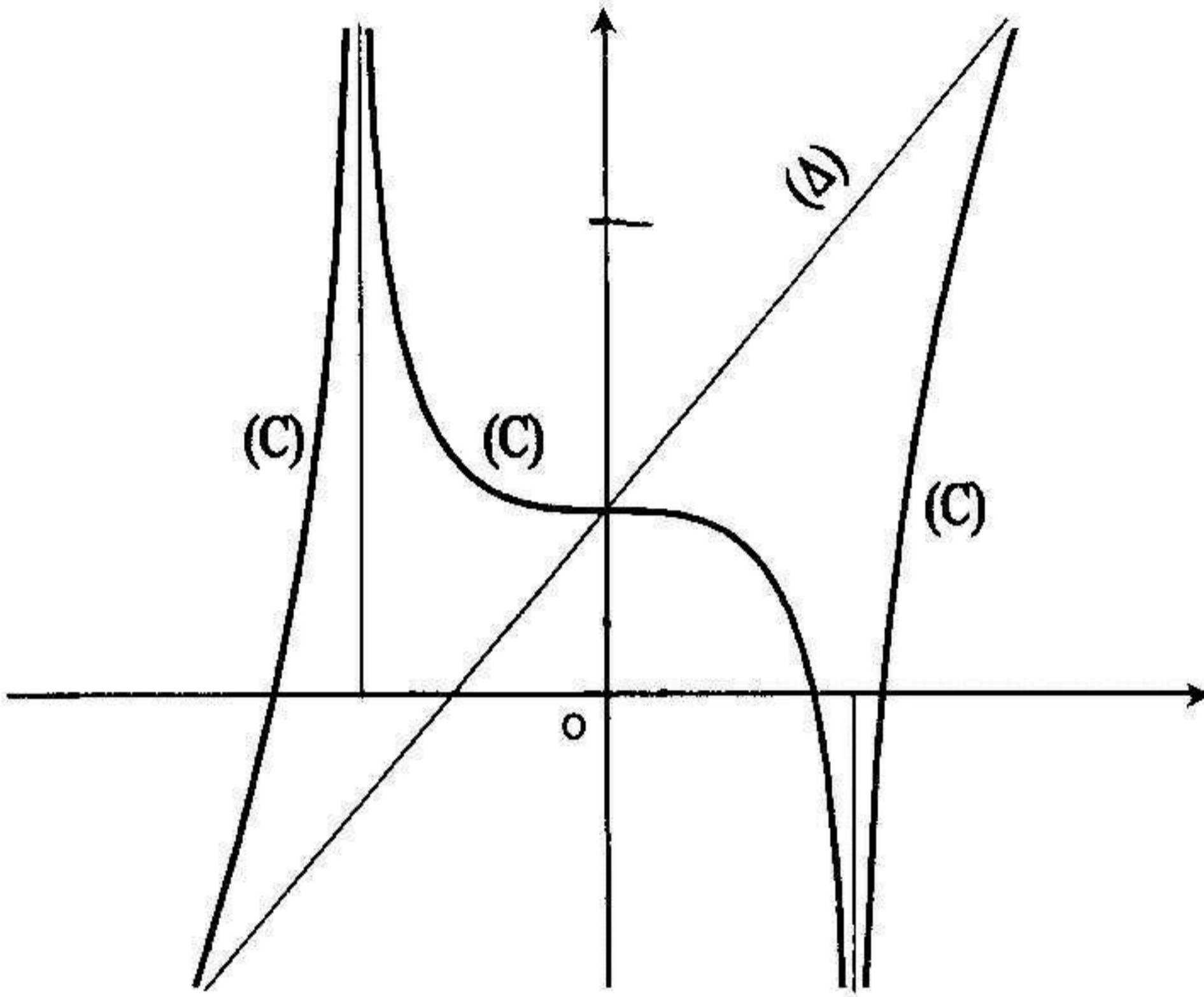
من أجل كل $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ لدينا :

$$f(-x) + f(x) = 8 + \ln \left| \frac{-x-2}{-x+2} \right| + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| =$$

$$= 8 + \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| = 8 + \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \times \frac{x-2}{x+2} \right| = 8 + \ln 1 = 8$$

بما أن $f(-x) + f(x) = 8$ فالنقطة $(0; 4)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

(ب) إنشاء المنحنى (c)



5 مناقشة عدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (D_m) المستقيم (D_m) يوازي المستقيم المقارب المائل (Δ) ويقطع $(y'y)$ في النقطة $(0; m)$. من التمثيل البياني للمنحنى (c) نستنتج ما يلي :

$$m \in]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[\quad , \quad m = 4$$

6 حساب المساحة المحددة بالمنحنى (c) والمستقيمات التي معادلاتها

$$x=3 \quad , \quad x=6 \quad , \quad y=x+4$$

$$S = \int_3^6 [(x+4) - f(x)] dx = - \int_3^6 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| dx$$

لحساب S . بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$

$$v'(x) = \frac{4}{x^2-4} \quad \text{ومنه} \quad v(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

$$\begin{aligned}
S &= - \int_3^6 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| dx = \left[-x \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_3^6 + \int_3^6 \frac{4x}{x^2-4} dx = \\
&= \left[-x \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_3^6 + 2 \int_3^6 \frac{2x}{x^2-4} dx = \left[-x \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 2 \ln |x^2-4| \right]_3^6 = \\
&= \left(-6 \ln \frac{1}{2} + 2 \ln 32 \right) - \left(-3 \ln \frac{1}{5} + 2 \ln 5 \right) = 6 \ln 2 + 2 \ln 2^5 - 3 \ln 5 - 2 \ln 5 \\
&= 6 \ln 2 + 10 \ln 2 - 5 \ln 5 = 16 \ln 2 - 5 \ln 5 \quad (u.a)
\end{aligned}$$

إنشاء منحنى الدالة g

الدالة g معرفة على المجال $]2; +\infty[$. من أجل كل $x \in]2; +\infty[$ لدينا
 $f(x) = x + 4 + \ln(x-2) - \ln(x+2) = g(x)$ ، إذن منحنى الدالة g هو
منطبق على المنحنى (c) في المجال $]2; +\infty[$.

مسألة 7

لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2}$ وليكن (c) المنحنى

البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = 2 - x - \ln(x-1)$.

1- (أ) أدرس تغيرات الدالة g . (ب) أحسب $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
(2) أدرس تغيرات الدالة g .

3- (أ) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1; 2[$.

(ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . (4) أنشئ المنحنى (c) .

5- (أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

(ب) أثبت أن من أجل كل $x \in D_f$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1} + \delta \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$ حيث

α, β, δ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(ج) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $y = 1$, $x = \lambda$, $x = 2$ حيث λ عدد حقيقي أكبر من 2.

(د) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

الحل

1- أ) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : تكون الدالة g معرفة إذا كان $x - 1 > 0$ ، إذن $D_g =]1; +\infty[$


حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \left(\frac{2-x}{x-1} - 2 \frac{\ln(x-1)}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x-1} = -1 \text{ لأن} \right)$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$: $g'(x) = -1 - \frac{2}{x-1} < 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		—
$g(x)$		$+\infty$  $-\infty$

(ب) حساب $g(2)$ واستنتاج إشارة $g(x)$

$g(2) = 0$ ، من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$g(x) > 0$ من أجل $x \in]1; 2[$ و $g(x) < 0$ من أجل $x \in]2; +\infty[$

2) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف : $D_f =]1; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} = -\infty$

على المجال $]1; 2]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما .

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ و $f(2) = 2$. العدد 0 ينتمي إلى المجال $] -\infty; 2]$ ،

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1; 2[$.

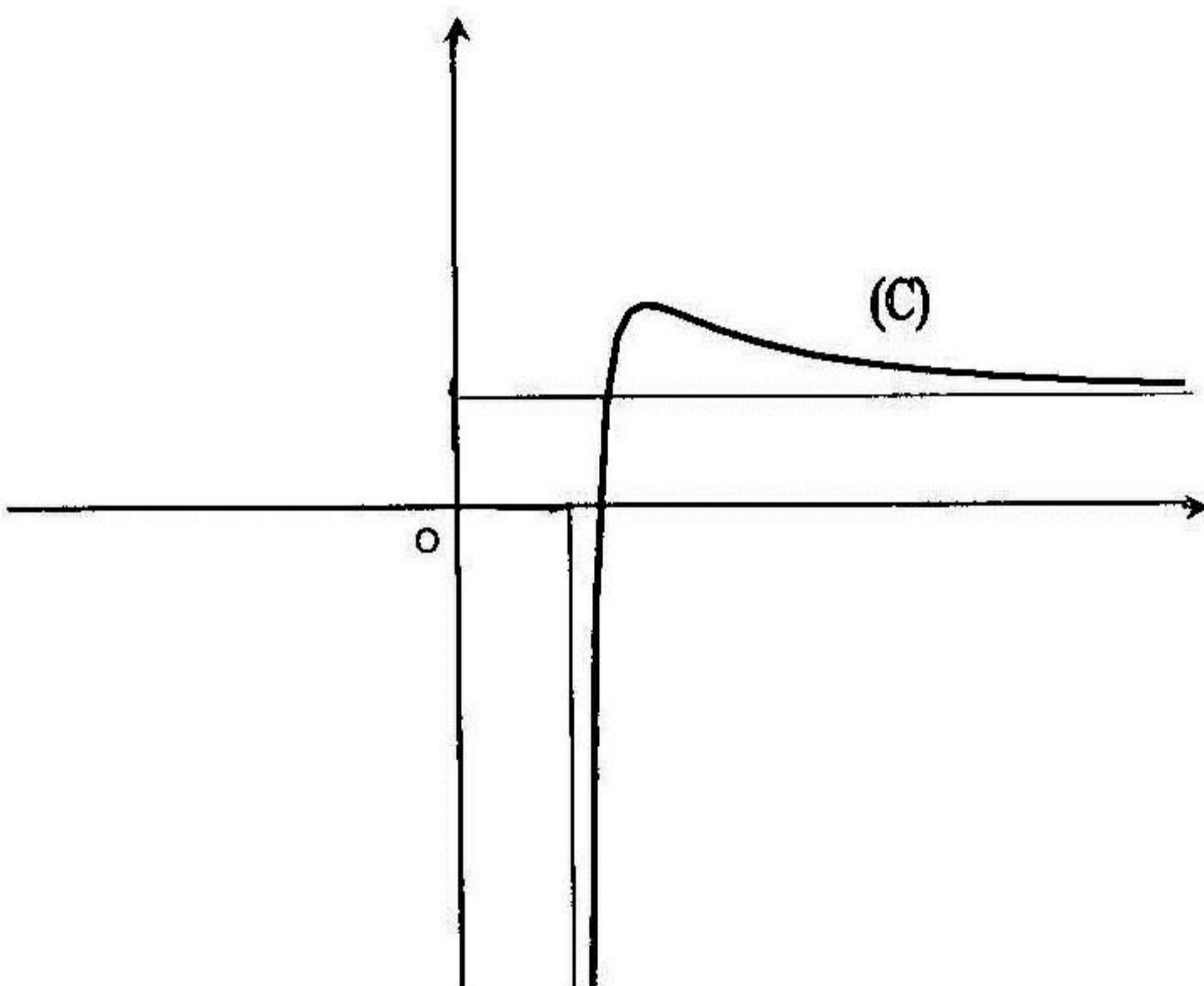
(ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في

جوار $(+\infty)$.

(4) إنشاء المنحني (c)



5- أ) تعيين دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$ ، بوضع $u'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

ومنه $u(x) = -\frac{1}{x-1}$ و $v(x) = \ln(x-1)$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x-1}$

على المجال $]1; 2]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما .

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ و $f(2) = 2$. العدد 0 ينتمي إلى المجال $] -\infty; 2]$ ،

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 \in]1; 2[$.

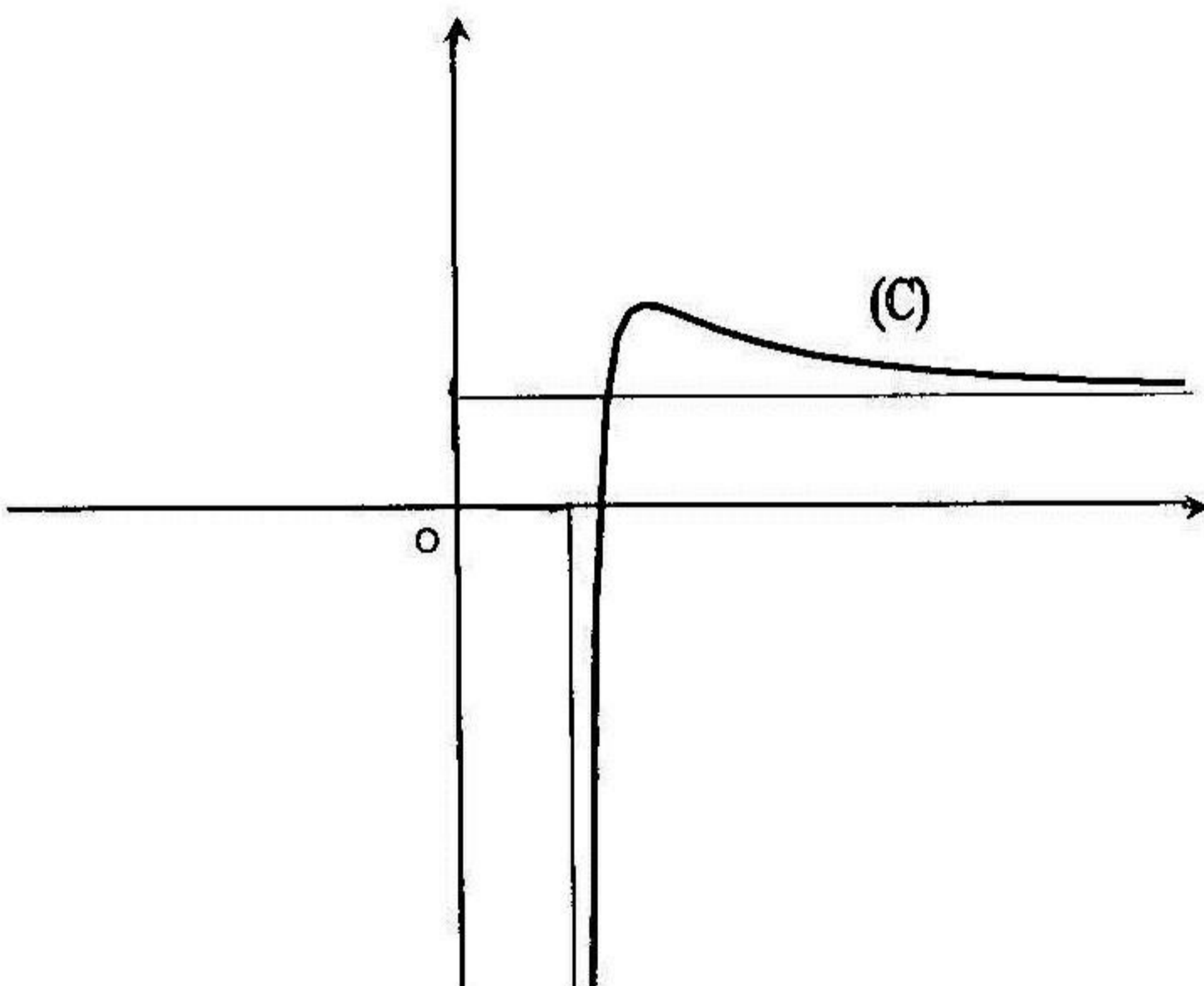
(ب) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $x = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ، فالمستقيم ذي المعادلة $y = 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في

جوار $(+\infty)$.

(4) إنشاء المنحني (c)



5- أ) تعيين دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب $\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx$ ، بوضع $u'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

ومنه $u(x) = -\frac{1}{x-1}$ و $v(x) = \ln(x-1)$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x-1}$

$$\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} \times \ln(x-1) + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x-1} \times \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c = -\frac{1}{x-1} [1 + \ln(x-1)] + c$$

(ب) إثبات أن من أجل $x \in D_f$: $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-1} + \delta \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x + \ln(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + x - 1 + \ln(x-1)}{(x-1)^2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

إذن $\alpha = \beta = \delta = 1$. يمكن استعمال طريقة المطابقة لإيجاد الأعداد α, β, δ .

(ج) حساب المساحة $S(\lambda)$

$$S(\lambda) = \int_2^\lambda [f(x) - 1] dx = \int_2^\lambda \frac{1}{x-1} dx + \int_2^\lambda \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2} dx =$$

$$= \left[\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \times (1 + \ln(x-1)) \right]_2^\lambda =$$

$$= \ln(\lambda-1) - \frac{1 + \ln(\lambda-1)}{\lambda-1} + 1 \quad (u.a)$$

(د) حساب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\ln(\lambda-1) - \frac{1}{\lambda-1} - \frac{\ln(\lambda-1)}{\lambda-1} + 1 \right] = +\infty$$

(لأن $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(\lambda-1) = +\infty$ و $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda-1} = 0$ و $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\lambda-1)}{\lambda-1} = 0$)

مسألة 8

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$

(1) أحسب $g(-2)$, $g(0)$. (2) أدرس تغيرات الدالة g

3) استنتج إشارة $g(x)$.

11. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x + 1 - \frac{\ln|x+1|}{x+1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أثبت أن من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$. ب) ادرس تغيرات الدالة f

2- أ) برهن أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيينه.

ب) ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D) . 3) أنشئ المنحني (c) .

4) أثبت أن من أجل كل $x \in D_f$ فإن $f(-x) + f(x) = 0$. ماذا نستنتج ؟

5- أ) أثبت أنه توجد نقطتان من المنحني (c) يكون فيهما المماس موازيا للمستقيم (D) .

ب) عين إحداثيات هاتين النقطتين واكتب معادلة المماسين للمنحني (c) عندهما .

6- أ) عين على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \frac{\ln|x+1|}{x+1}$

ب) استنتج على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة f .

ج) أحسب مساحة الحيز المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$

الحل

1. أ) حساب $g(0)$ ، $g(-2)$

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(-2) = 0$$

2) دراسة تغيرات الدالة g

مجموعة تعريف : $D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_g$ فإن :

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

من أجل $x \in D_g$: $2(x+1)^2 + 1 > 0$ ، إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x+1$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		$-\infty$ ↗ $+\infty$

(3) إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج ما يلي :

$$g(x) > 0 \text{ من أجل } x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$$

$$g(x) < 0 \text{ من أجل } x \in]-2; -1[\cup]-1; 0[$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2} \quad : x \in D_f \text{ من أجل } \text{II. 1- أ) إثبات أن من أجل } x \in D_f$$

$$x \in D_f ; f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1} \times (x+1) - \ln|x+1|}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln|x+1|}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln|x+1|}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln|x+1|}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f :

مجموعة تعريف :

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	$-$	\circ	$+$
$f(x)$		-1		1		
	$-\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$

2- البرهان بأن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (D)

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = -\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x+1|}{x+1} = 0$$

إذن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

ب) دراسة وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

$$f(x) - (x+1) = -\frac{\ln|x+1|}{x+1}$$

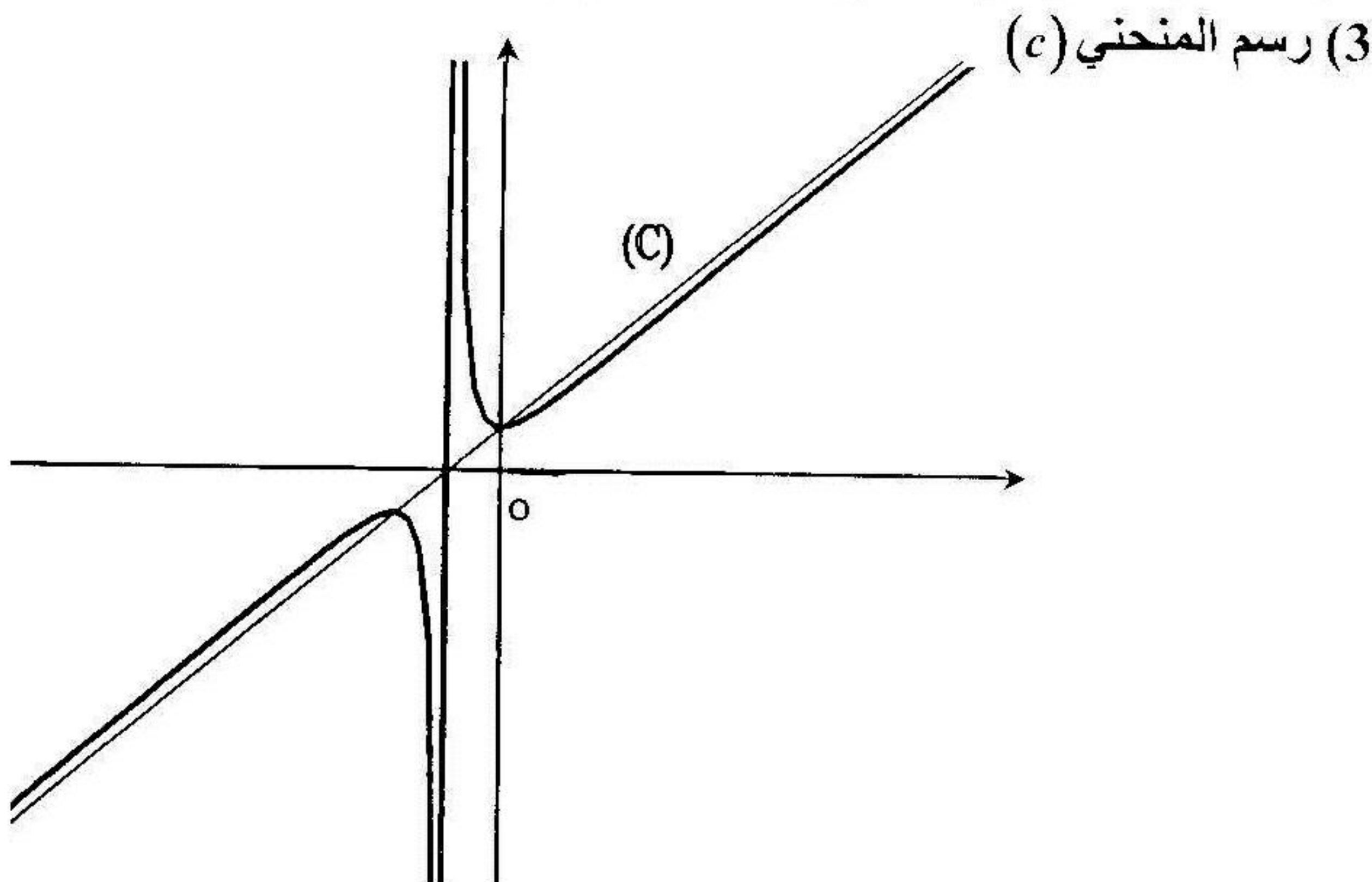
وضعية (c) بالنسبة إلى (D) تتعلق بإشارة الكسر $-\frac{\ln|x+1|}{x+1}$. المستقيم (D) يقطع المنحني (c) إذا كانت المعادلة

$$-\frac{\ln|x+1|}{x+1} = 0$$

لها حلول ، ومنه $\ln|x+1| = 0$ ومنه $|x+1| = 1$ أي $x = -2$ أو $x = 0$ ، إذن المستقيم (D) يقطع المنحني (c) في نقطتين $x = -2$ و $x = 0$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$\ln x+1 $	$+$	\circ	$-$	$-$	\circ	$+$
$x+1$	$-$		$-$	\circ	$+$	$+$
$-\frac{\ln x+1 }{x+1}$	$+$	\circ	$-$	$+$	\circ	$-$

المنحني (c) يكون فوق المستقيم (D) في المجال $]-\infty; -2[\cup]-1; 0[$ وفي المجال $]0; +\infty[\cup]-2; -1[$ يكون المنحني (c) تحت المستقيم (D).



(4) إثبات أن من أجل $x \in D_f$: $f(-2-x) + f(x) = 0$ إذا كان $x \in D_f$ فإن $(-2-x) \in D_f$ ومنه :

$$f(-2-x) + f(x) = \frac{\ln|-(x+1)|}{(x+1)} - \frac{\ln|x+1|}{x+1} = 0$$

(لأن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $|-(x+1)| = |(x+1)|$)

نستنتج أن النقطة $(-1; 0)$ هي مركز تناظر المنحني (c)

(5-أ) إثبات وجود نقطتان من (c) يكون المماس عندهما يوازي (D)

المماس للمنحني (c) عند النقطة التي فاصلتها x يوازي (D) يعني :

$$\frac{x^2 + 2x + \ln|x+1|}{(x+1)^2} = 1 \quad \text{ومنه } f'(x) = 1 \quad \text{ومنه } f'(x) = 1$$

ومنه $\ln|x+1|=1$ ومنه $x^2 + 2x + \ln|x+1| = (x+1)^2$

ومنه $|x+1|=e$ أي $x+1=e$ أو $x+1=-e$ ومنه $x=-1+e$ أو $x=-1-e$

إذن توجد نقطتان $\left(-1+e; e-\frac{1}{e}\right)$, $\left(-1-e; -e+\frac{1}{e}\right)$ من المنحني (c) يكون

عندهما المماس للمنحني (c) موازيا للمستقيم (D).

(ب) معادلة المماسين للمنحني (c)

$$(\Delta_1): y = f'(-1-e)(x+1+e) + f(-1-e) = x+1 + \frac{1}{e}$$

$$(\Delta_2): y = f'(-1+e)(x+1-e) + f(-1+e) = x+1 - \frac{1}{e}$$

6- (أ) تعيين على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{\ln|x+1|}{x+1}$

$$\int \frac{\ln|x+1|}{x+1} dx = \int \frac{1}{x+1} \times \ln|x+1| dx = \frac{1}{2} [\ln(x+1)]^2 + c$$

(لأن لدينا الشكل $\int u'(x) \times u(x) dx = \frac{1}{2} [u(x)]^2 + c$)

(ب) استنتاج على المجال $]-1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة f

$$\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} [\ln(x+1)]^2 + c$$

(ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x=0$, $x=1$, $y=x+1$

$$S = \int_0^1 [(x+1) - f(x)] dx = \int_0^1 \frac{\ln|x+1|}{x+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$$

مسألة 9

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} + 1$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة g(x)

(2) لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$f(x) = x \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$, $x \neq 0$ و $f(0) = 0$ وليكن (c) المنحني البياني

- لها في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$. (أ) هل الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$ ؟
 (ب) أدرس قابلية الاشتقاق f على يمين $x = 0$ وفسر هندسيا النتيجة .
 (3) أدرس تغيرات الدالة f .

4- (أ) احسب $f(-3)$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-2)$

- (ب) برهن بأن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2; -3/2[$
 (ج) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ (ضع $x = \frac{1}{h}$ للوصول إلى نهاية شهيرة)
 (د) استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل (D) للمنحني (c) .
 (5) أنشئ المنحني (c) . (6) عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha \leq 1$

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب : $\int_{\alpha}^1 x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$

- (ب) احسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمتين $x = \alpha$, $x = 1$, (D)

الحل

(1) دراسة تغيرات الدالة g واستنتاج إشارة $g(x)$

مجموعة تعريف : تكون الدالة g إذا كان $\left(1 + \frac{1}{x} \right) > 0$ و $x \neq 0$ ومنه

$D_g =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ ومنه $x(x+1) > 0$ ومنه $\frac{x+1}{x} > 0$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x+1} + 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{(x+1) \ln|x+1| - 1}{x+1} - \ln|x| + 1 \right] = +\infty\end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln|x+1| = 0 \text{ لأن} \right)$$

حساب المشتق ودراسة إشارته: من أجل كل $x \in D_g$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left[\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} + 1 \right]' = \left[\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x+1} + 1 \right]' = \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(-x)$

$$x \in]-\infty; -1[\text{ من أجل كل } g'(x) > 0, \quad x \in]0; +\infty[\text{ من أجل كل } g'(x) < 0$$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$			$-$
$g(x)$	1	$+\infty$		$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن $g(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_g$

2- أ) دراسة استمرارية الدالة f على يمين $x=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + x \ln \frac{x+1}{x} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[x + x \ln(x+1) - x \ln x \right] = 0 = f(0)\end{aligned}$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$

(ب) قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ والتفسير الهندسي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty$$

الاشتقاق على يمين $x = 0$ ، والتفسير الهندسي لهذه النتيجة هو أن المنحني (c) على يمين 0 له نصف مماس يوازي محور الترتيب .

(3) دراسة تغيرات الدالة f

$$D_f =]-\infty; -1[\cup [0; +\infty[\quad \text{مجموعة تعريف :}$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1 + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \left(\frac{-1}{x(x+1)} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} + 1 = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، إذن $f'(x) > 0$ من أجل كل $x \in D_f$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$

4- (أ) حساب $f(-2)$ ، $f(-3/2)$ ، $f(-3)$

$$f(-2) = -2 \left(1 + \ln \frac{1}{2} \right) = -2(1 - \ln 2) < 0$$

$f(-3/2) = 3/2(\ln 3 - 1) > 0$, $f(-3) = -3(1 + \ln 2/3)$
 (ب) البرهان بأن المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2; -3/2[$
 على المجال $[-2; -3/2]$ الدالة f مستمرة ومنتزادة تماما والعدد 0 محصور
 بين $f(-2)$ و $f(-3/2)$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحني (c) يقطع $(x'x)$ في
 نقطة وحيدة $x_0 \in]-2; -3/2[$.

(ج) البرهان بأن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1$$

بوضع $x = \frac{1}{h}$ ، لما $|x| \rightarrow +\infty$ فإن $h \rightarrow 0$ ومنه

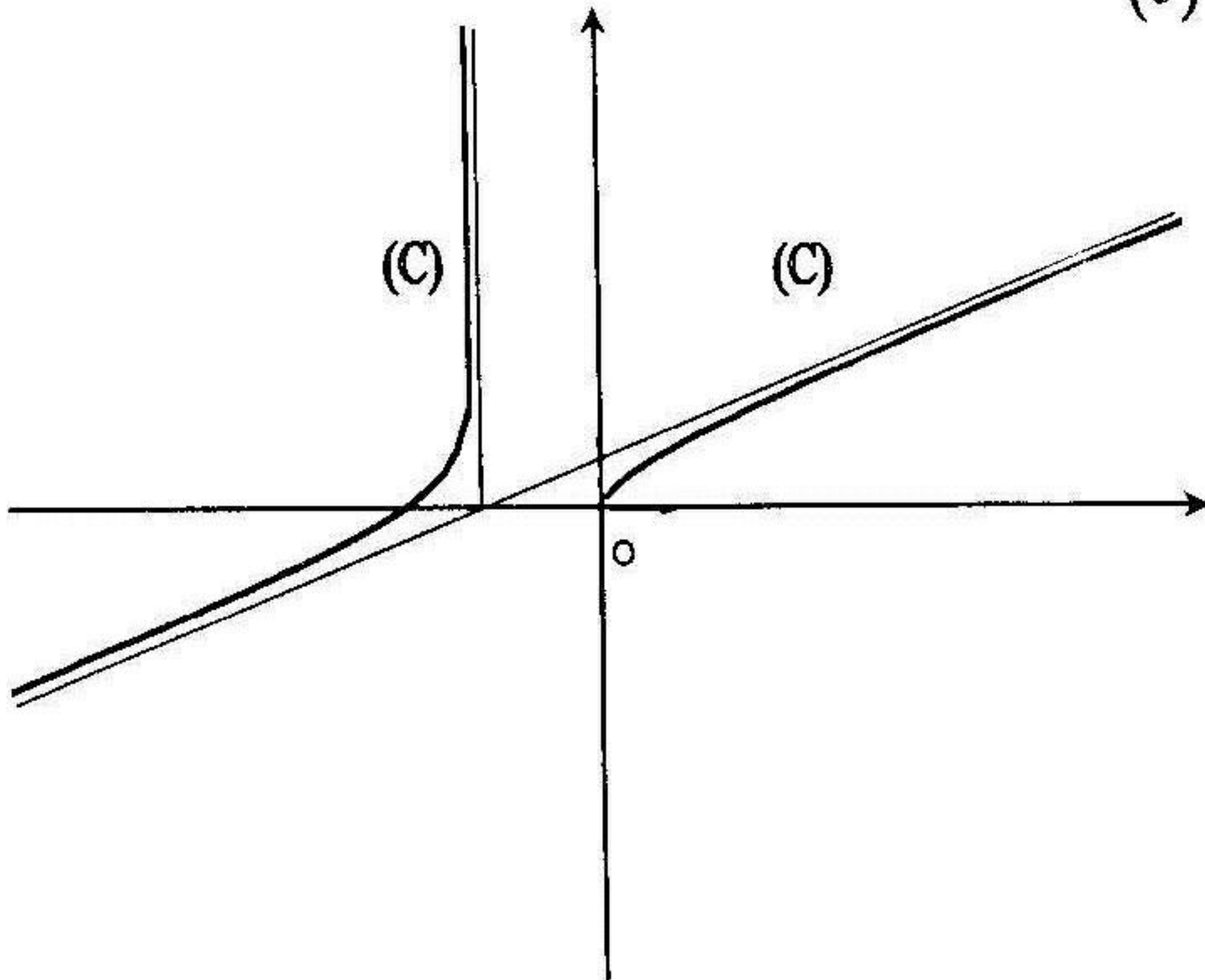
$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 \cdot (1+h)}{h} - 1 = 1 - 1 = 0$$

(د) استنتاج معادلة المستقيم المقارب (D) للمنحني (c)

بما أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$ ، حسب التعريف فالمستقيم (D) ذو المعادلة

$y = x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$ وفي جوار $(+\infty)$

(5) رسم المنحني (c)



$$6-أ) \text{ حساب : } \int_{\alpha}^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\text{بوضع } u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ ومنه } u'(x) = x$$

$$\text{و } v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ ومنه } v'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]_{\alpha}^1 + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln(x+1) \right]_{\alpha}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \ln(\alpha+1) \end{aligned}$$

ب) حساب المساحة المحصورة بين (c) والمستقيمات التي معادلاتها :

$$y = x+1, \quad x = \alpha, \quad x = 1$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^1 [(x+1) - f(x)] dx = \int_{\alpha}^1 \left[1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] dx = \\ &= \int_{\alpha}^1 dx - \int_{\alpha}^1 x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = [x]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \ln(\alpha+1) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \alpha + \alpha^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \ln(1 + \alpha)\right] \quad (u.a) \end{aligned}$$

مسألة 10

1. f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x ومعرفة بـ : $f(x) = x+1 - 2 \ln(x+1)^2$

نسمى (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحني (c).

(2) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

(3) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ثم
 أرسم المنحني (c). (4-أ) أحسب مساحة الحيز المستوي المحددة
 بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلاتها : $x = -2$, $x = \alpha$, $y = 0$

(ب) أثبت أن : $S(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 7$

II. ليكن T التحويل النقطي في المستوي (π) الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$

النقطة $M'(x'; y')$ حيث :
$$\begin{cases} x' = x - y - 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$$

- (1) أكتب z' بدلالة z حيث z' و z هما لاحقتي النقطتين M' و M على الترتيب .
- (2) استنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .
- (3) عين معادلة (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

الحل

1. (1) دراسة تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحني (c)

مجموعة تعريف : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 1 - 2 \ln(x + 1)^2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 1 - 4 \ln(x + 1)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) \left[1 - 4 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right] = +\infty \end{aligned}$$

حساب المشتق ودراسا إشارته : من أجل كل $x \in D_f$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x+1} = \frac{x-3}{x+1} \quad . f'(x) = 0 \text{ من أجل } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \text{ من أجل }]3; +\infty[\cup]-\infty; -1[\text{ ، } f'(x) < 0 \text{ من أجل }]-1; 3[$$

جدول تغيرات :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$

دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (c)

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 4 \frac{\ln|x+1|}{x} \right) =$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 4 \frac{\ln|x+1|}{|x+1|} \times \frac{|x+1|}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - 2 \ln(x+1)^2] = -\infty$$

إذن في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$ المنحني (c) له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $y = x$

(2) البرهان بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-2 < \alpha < -3/2$

على المجال $[-2; -3/2]$ الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما .

$$\text{ولدينا } f(-2) = -1 \text{ و } f(-3/2) = -\frac{1}{2} + 2 \ln 4 \approx 2,26$$

العدد 0 محصور بين $f(-2)$ و $f(-3/2)$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-2 < \alpha < -3/2$

(3) دراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) تتعلق بإشارة الفرق $f(x) - x$

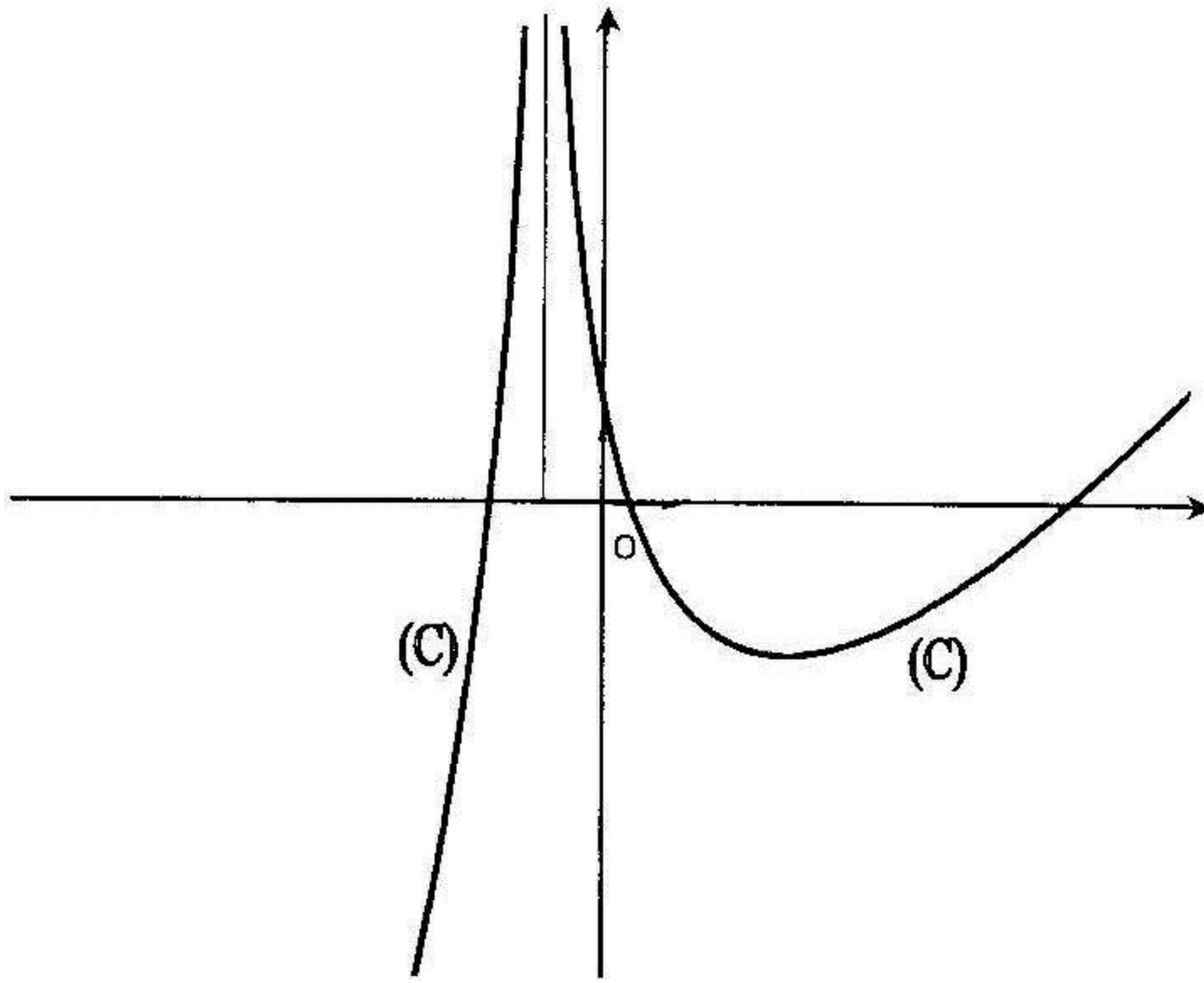
$$f(x) - x = 1 - 2 \ln(x+1)^2 = 1 - 4 \ln|x+1|$$

$1 - 4 \ln|x+1| > 0$ ومنه $\ln|x+1| < \frac{1}{4}$ ومنه $|x+1| < e^{1/4}$ ومنه

$-e^{\frac{1}{4}} < x+1 < e^{\frac{1}{4}}$ ومنه $x \in]-1-e^{\frac{1}{4}}; -1+e^{\frac{1}{4}}[$ في هذا المجال (c) فوق (Δ) .

$1-4\ln|x+1| < 0$ ومنه $x \in]-\infty; -1-e^{\frac{1}{4}}[\cup]-1+e^{\frac{1}{4}}; +\infty[$ في هذا المجال

يكون (c) تحت (Δ)
رسم المنحني (c)



4- أ) حساب المساحة $S(\alpha)$ المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = -2$, $x = \alpha$, $y = 0$

$$S(\alpha) = - \int_{-2}^{\alpha} f(x) dx = - \int_{-2}^{\alpha} [x+1 - 2\ln(x+1)^2] dx =$$

$$= - \int_{-2}^{\alpha} [x+1 - 4\ln|x+1|] dx = - \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{\alpha} + 4 \int_{-2}^{\alpha} \ln|x+1| dx$$

لحساب التكامل $\int_{-2}^{\alpha} \ln|x+1| dx$ نستخدم التكامل بالتجزئة.

بوضع $u'(x) = 1$ ومنه $u(x) = x$ و $v(x) = \ln|x+1|$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \int \ln|x+1| dx &= x \ln|x+1| - \int \frac{x}{x+1} dx = \\ &= x \ln|x+1| - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x \ln|x+1| - x + \ln|x+1| = \\ &= (x+1) \ln|x+1| - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \left[-\frac{x^2}{2} + 4(x+1) \ln|x+1| - 5x \right]_{-2}^{\alpha} = \\ &= \left(-\frac{\alpha^2}{2} + 4(\alpha+1) \ln|\alpha+1| - 5\alpha - 8 \right) \text{ (u.a)} \end{aligned}$$

$$S(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - 3\alpha - 7 \text{ (ب) إثبات أن}$$

نعلم أن $f(\alpha) = 0$ ومنه $\alpha + 1 - 4 \ln|\alpha + 1| = 0$ ومنه $\alpha + 1 = 4 \ln|\alpha + 1|$ وبتعويض $4 \ln|\alpha + 1|$ بـ $(\alpha + 1)$ في $S(\alpha)$ نجد:

$$S(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} - 5\alpha + (\alpha + 1)^2 - 8 = \frac{1}{2}\alpha^2 - 3\alpha - 7$$

II. (1) كتابة z' بدلالة z

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' = x - y - 1 + i(x + y + 1) = \\ &= (x + iy) - 1 + ix - y + i = (x + iy) - 1 + ix + i^2 y + i = \\ &= (x + iy) + i(x + iy) + (-1 + i) = (1 + i)(x + iy) + (-1 + i) = \\ &= (1 + i)z + (-1 + i) \end{aligned}$$

(2) طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

لدينا $z' = (1 + i)z + (-1 + i)$ فالتحويل T هو من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ وبما أن

$|1 + i| = \sqrt{2} \neq 1$ فالتحويل T هو تشابه نسبه $\sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ ومركزه

$$\text{النقطة } \omega \text{ ذات اللاحقة : } \frac{-1 + i}{1 - (1 + i)} = \frac{-1 + i}{-i} = -1 - i$$

(3) معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

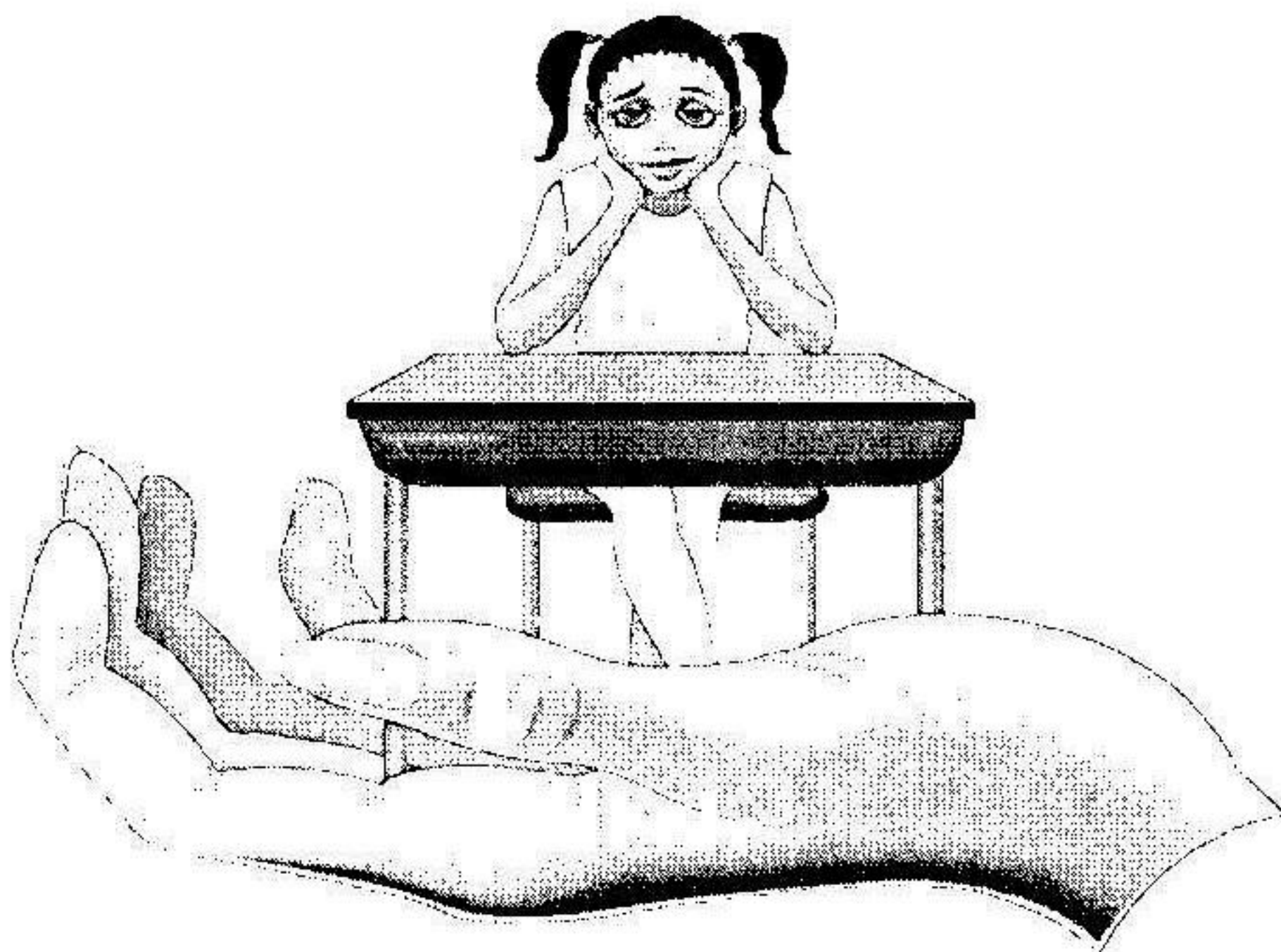
لدينا معادلة المنحني (c) : $y = x + 1 - 4 \ln|x + 1|$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y') \\ y = \frac{1}{2}(-x' + y' - 2) \end{cases} \quad \text{من العبارة التحليلية للتحويل } T \text{ نستنتج أن :}$$

وتكون معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T هي :

$$\frac{1}{2}(-x' + y' - 2) = \frac{1}{2}(x' + y') + 1 - 4 \ln \left| \frac{1}{2}(x' + y') + 1 \right| \quad \text{ومنه}$$

$$x' + 2 - 4 \ln \left| \frac{1}{2}(x' + y') + 1 \right| = 0 \quad \text{وهي معادلة } (\Gamma).$$



دوال لوغاريتمية مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي :

$$1) f(x) = x(1 - \ln x) \quad , \quad 2) f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$3) f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x) \quad , \quad 4) f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$$

$$5) f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \ln|x+1| \quad , \quad 6) f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \ln|x-2|$$

$$7) f(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4) \quad , \quad 8) f(x) = 2x + 1 + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$9) f(x) = x^2 + 1 + \ln \frac{1}{2x+1} \quad , \quad 10) f(x) = \frac{1 + (\ln x)^2}{1 - (\ln x)^2}$$

$$11) f(x) = x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} \quad , \quad 12) f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$

$$13) f(x) = \frac{\ln x}{1 - |\ln x|} \quad , \quad 14) f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1)$$

$$15) f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2 \quad , \quad 16) f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{1 - \ln x}$$

$$17) f(x) = x - 1 + \ln \frac{x-1}{x+2} \quad , \quad 18) f(x) = (x+1) \ln|x+1| - x + 1$$

$$19) f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1} + 2 \ln(x+1) \quad , \quad 20) f(x) = (x^2 - x) \ln|x| + \frac{x^2}{2}$$

$$21) f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x^2 - 1) \quad , \quad 22) f(x) = \frac{1}{4 - (\ln|x|)^2}$$

مسائل مقترحة للحل

مسألة 1

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(1) برهن على وجود عددين حقيقيين α, β حيث : $g(x) = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}$.

(2) عين الدوال الأصلية للدالة g في المجال $]-1, 1[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - x$ وليكن (c) المنحني البياني لها

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f . (2) أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا نستنتج؟

(3) أدرس تغيرات الدالة f . (4) أنشئ المنحني (c) (طول الوحدة $2cm$)

(5) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة $x = 0$.

مسألة 2

I. (1) أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$.

(2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$.

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. ب) فسر هندسيا النتيجة .

(2) أ- أحسب $f'(x)$ وبرهن أن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.
ب) أعطي جدول تغيرات الدالة f .

(3) أ- برهن أن : $\forall x \in [1; +\infty[$ فإن $f(x) > 0$.

ب) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$. (4) أنشئ المنحني (c)

(5) أ- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. ب) استنتج حساب مساحة الحيز

المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلتاهما : $x = 1$ ، $x = e$ ، $y = 0$

مسألة 3

I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$. (2-أ) برهن أن المستقيم ذو

المعادلة $x = \frac{1}{2}$ هو محور تناظر للمنحنى (c) للدالة g . (ب) أنشيء المنحنى (c)

(3-أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب : $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} x \ln x dx$ ، $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (1-x) \ln(1-x) dx$

(ب) أحسب المساحة المحددة بـ (c) ومحور الفواصل والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{3}{4}$.

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$ وليكن (Γ) منحنىها البياني في

معلم جديد متعامد و متجانس . (1) أحسب $f'(x)$ وتحقق أن :

$$1 \quad (2) \quad \text{أنشيء المنحنى } (\Gamma) \quad f'(x) = \frac{-g(x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$$

(3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m حلول المعادلة:

$$\ln(1-x) - m \ln x - \ln x = 0$$

مسألة 4

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$.

ليكن (c) منحنى الدالة f . (1-أ) عين مجموعة تعريف الدالة f

(ب) برهن أن $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + f(-x) = 2 \ln 2$. (2) أدرس تغيرات الدالة f

(3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . (4) أنشيء المنحنى (c)

مسألة 5

I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x - 1 + \ln \frac{x}{x+1}$

نسمي (c) الممثل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس (طول الوحدة $2cm$) .

(1) أدرس تغيرات الدالة g . (2-أ) برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$

هو مستقيم مقارب للمنحني (c). (ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D)

(3) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد على المجال $]0; +\infty[$

(4) أنشيء المنحني (c). (5) أحسب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات :

$x=1$, $x=3$, (D).

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = g(n) - 2n + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

(1) أدرس تغيرات المتتالية (u_n) واستنتج إشارة u_n . نضع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(أ) أحسب S_n بدلالة n . (ب) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

مسألة 6

1. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$. (1-أ) عين مجموعة تعريف الدالة g

(ب) أدرس تغيرات الدالة . (2) أنشيء المنحني (c) الممثل البياني للدالة g في معلم متعامد ومتجانس .

(3-أ) عين دالة أصلية للدالة g . (ب) λ عدد حقيقي حيث : $\frac{1}{e} < \lambda < 1$

أحسب مساحة الحيز بالمنحني (c) والمستقيمات : $x = \lambda$, $x = \frac{1}{e}$, $y = 0$

1. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln |\ln x|$. (1) أدرس تغيرات الدالة f

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ) للدالة f .

(3) أنشيء المنحني (Γ) في معلم جديد متعامد ومتجانس.

مسألة 7

1. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = x + 3 + \ln \frac{|x| + 1}{x + 2}$ وليكن (c) المنحني الممثل

للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

(1-أ) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f . (ب) أدرس اشتقاق الدالة f على D_f

(2) أدرس تغيرات الدالة f . (3-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x - 3$. ماذا نستنتج ؟

(ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$

$$\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases} \quad \text{ذات اللاحقة } z' \text{ حيث :}$$

(1) أكتب z' بدلالة z ثم استنتج طبيعة التحويل T وعنصره المميز.

(2) أكتب معادلة المنحني (δ) صورة المنحني (c) بالتحويل T

مسألة 11

$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 & ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بـ :}$$

وليكن (c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- (أ) بين أن f مستمرة على يمين الصفر .

- (ب) أدرس قابلية الاشتقاق على يمين الصفر وفسر هندسيا النتيجة .

(2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- (أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) بجوار $(+\infty)$

(ب) أرسم المنحني (c) .

$$4- (أ) \text{ باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب } \int_1^e x(\ln x - 1)^2 dx .$$

(ب) أحسب مساحة الحيز من المستوي المحصور بين (c) المنحني والمستقيمات التي

$$\text{معادلاتها : } x = 1, x = e, y = 0 .$$

(5) لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = x(\ln|x| - 1)^2$ لما $x \neq 0$ و $g(0) = 0$.

(أ) بين أن g هي دالة فردية . (ب) استنتج إنشاء المنحني (γ) للدالة g

مسألة 12

$$1. \text{ نعتبر الدالة } g \text{ المعرفة بـ : } g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

(1) أدرس التغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(2) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & ; \forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(أ) برهن أن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$.

(ب) أدرس قابلية الاشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$ وفسر هندسيا النتيجة .
(3) أدرس تغيرات الدالة f .

(4) أنشئ المنحنى (c) للدالة f . (5) ليكن α عدد حقيقي حيث : $0 < \alpha < 1$ ، أحسب المساحة $S(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) \text{ ثم أحسب } y = 0, x = \alpha, x = 1$$

II. نعتبر التحويل T الذي يحول النقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z إلى النقطة

$$M'(x'; y') \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ حيث : } z' = 2iz + 1 - i$$

(1) عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة .
(2) أكتب x', y' بدلالة x, y ثم عين معادلة صورة المنحنى (c) بالتحويل T

مسألة 13

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x^2 - 1)$ نسمي (c) ممثلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس . (1-أ) أحسب $f(\sqrt{2})$ ، $f(2)$. (ب) أدرس تغيرات الدالة f (ج) برهن بان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل جذرين يطلب إعطاء إشارتهما

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . (3) أنشئ المنحنى (c)

(4-أ) تحقق بأن الدالة : $x \rightarrow (x + \alpha) \ln(x + \alpha)$ هي دالة أصلية للدالة :

$x \rightarrow \ln(x + \alpha)$. (ب) تحقق بأن على المجال $[1, +\infty[$ فإن $f(x)$ تكتب :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

(ج) أحسب المساحة المحددة بالمنحنى (c) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$y = 0, x = 2, x = 3$$

II. نعتبر الدوران R الذي مركزه $\omega(1;1)$ وزويته $\frac{\pi}{2}$.

(1) عين العبارة المركبة للدوران R .

(2) أوجد معادلة صورة المنحنى (c) بالدوران R

مسألة 14

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ :

في معلم متعامد ومتجانس .
 1-1) أحسب $f'(x)$. (ب) نضع $h(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$. أدرس تغيرات الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.

2-1) تحقق أن $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$. (ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ج) أعطي جدول تغيرات الدالة f . (د) أحسب $f(1)$, $f(2)$, $f(e)$, $f(3)$.

3-1) برهن بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2} + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c)

- (ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

(4) أنشئ المنحني (c)

(5) أحسب مساحة الحيز المستوي مجموعة النقاط $M(x; y)$ حيث :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ \frac{x}{2} + 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

مسألة 15

I. لتكن g الدالة العددية حيث $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln|x|$.
 (1) أدرس تغيرات الدالة g .

2-1) برهن بأن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α من المجال $]\frac{1}{2}; 1[$.

(ب) أعطي حصرا للعدد α إلى 10^{-2} . (ج) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II. f دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$ وليكن (c) المنحني الممثل لها

في معلم متعامد ومتجانس .

1-1) عين مجموعة تعريف الدالة f . (ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x

من مجموعة تعريف f فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. (2) أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) برهن أن : $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$. ب) تحقق أن : $1,6 < f(\alpha) < 2,1$

4- أ) برهن أن المنحني (c) يقبل خطين مقاربين أحدهما مائل (D) يطلب تعيين معادلته.

ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (D)

5) (Δ) مستقيم معادلته $y = 2x - \frac{1}{2e}$. برهن أن المستقيم (Δ) يمس المنحني (c)

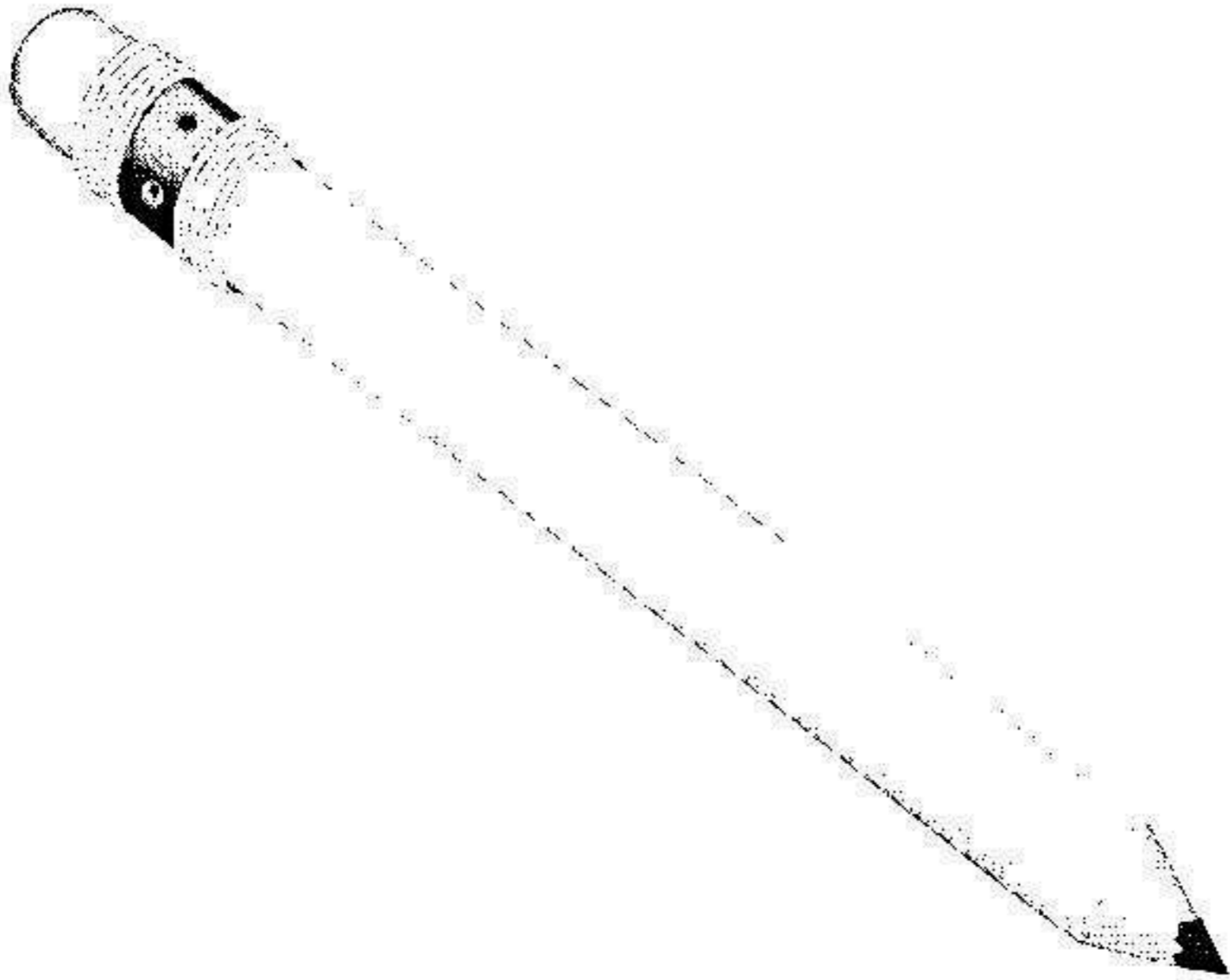
في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما . 6) أرسم المماس (Δ) والمنحني (c).

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات

المجهول x : $f(x) = 2x + m$. 8) λ عدد حقيقي ($\lambda \geq 1$) .

نضع : $S(\lambda) = \int_1^e [2x - f(x)] dx$. أ) فسر هندسيا النتيجة .

ب) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب العدد $S(\lambda)$. ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$



الدوال المركبة من الدوال اللوغاريتمية والأسية

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \end{cases} \quad \text{دراسة الدوال من الشكل :}$$

لتكن الدالة f المكونة من الدالتين f_1 على المجال L_1 و f_2 على المجال L_2 .

لدراسة هذا النوع من الدوال ندرس كل من الدالتين f_1 و f_2 على أفراد وفي المجالين

$$D_1 = L_1 \cap D_{f_1} \quad \text{و} \quad D_2 = L_2 \cap D_{f_2} \quad \text{حيث :}$$

(D_{f_1} و D_{f_2} يمثلان على الترتيب مجموعة التعريف كل من الدالتين f_1 و f_2)

وتكون D_f مجموعة التعريف الدالة f معرفة كما يلي : $D_f = D_1 \cup D_2$

مثال : لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - \ln(x^2 - 1) & , \quad x \in]-\infty ; 0[\\ f_2(x_2) = \sqrt{3-x} - 2e^x & , \quad x \in [0 ; +\infty[\end{cases}$$

$$D_1 = \{]-\infty ; -1[\cup]+1 ; +\infty[\} \cap \{]-\infty ; 0[\} =]-\infty ; -1[$$

$$D_2 =]-\infty ; 3] \cap [0 ; +\infty[= [0 ; 3]$$

$$D_f = D_1 \cup D_2 =]-\infty ; -1[\cup [0 ; 3]$$

أمثلة على دراسة الدوال المركبة من الدوال اللوغارتمية و الأسية

أدرس دراسة كاملة (تغيرات، الفروع اللانهائية، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتية :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2} \right) \quad (2) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x) \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1+2x} & , x \leq 0 \\ x(1 - \ln x) & , x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = x + \ln|e^x - 2| \quad (5) \quad f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \quad (4)$$

الحل

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^x) \quad (1)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$f'(x) = -\frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

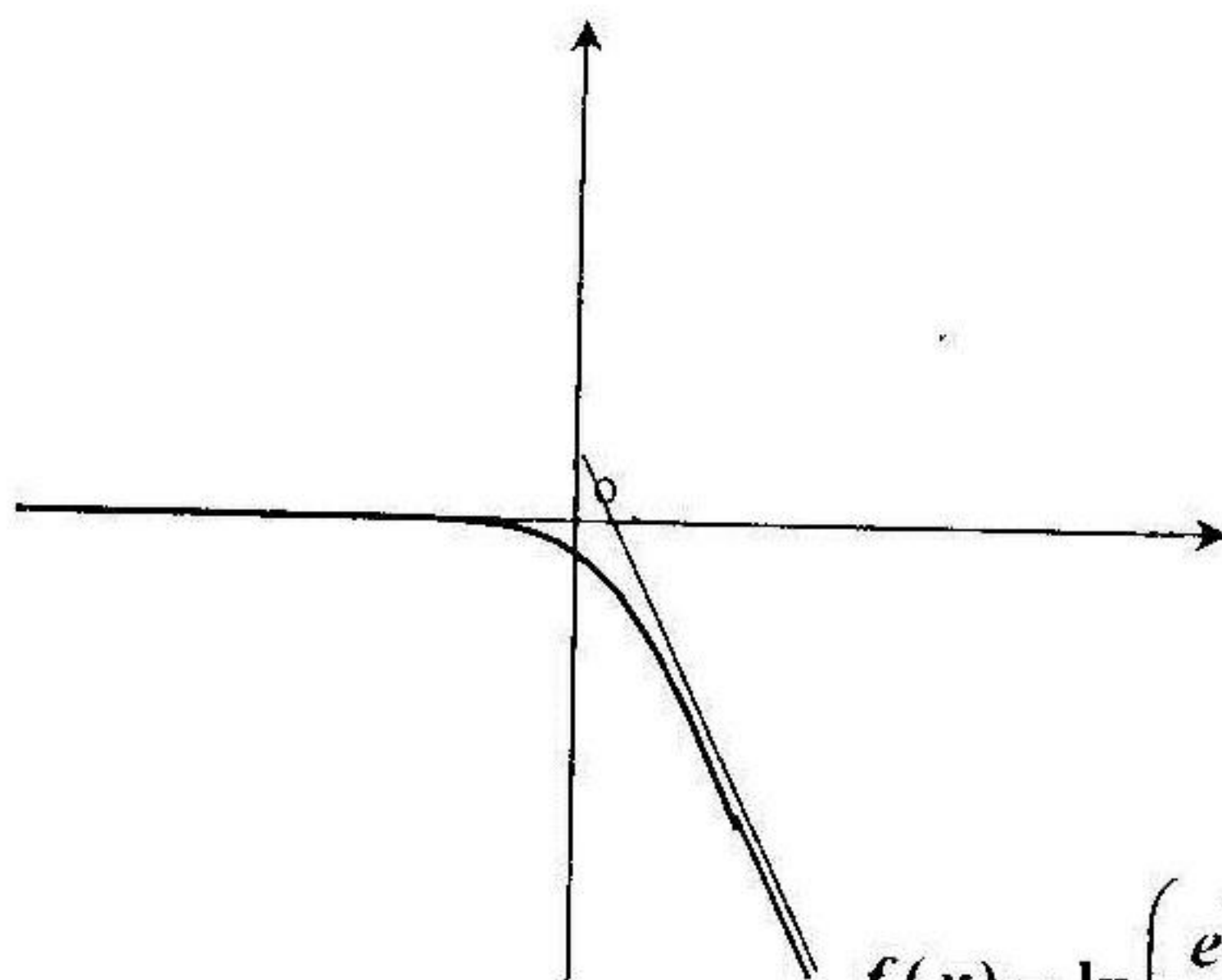
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	0	$-\infty$

جدول التغيرات :

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(-\infty)$

المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$ المنحني :



$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}\right) \quad (2)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]\ln 2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب النهايات :

$$f'(x) = \frac{e^x (e^{2x} - 4e^x - 5)}{(e^{2x} + 5)(e^x - 2)}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

جدول التغيرات :

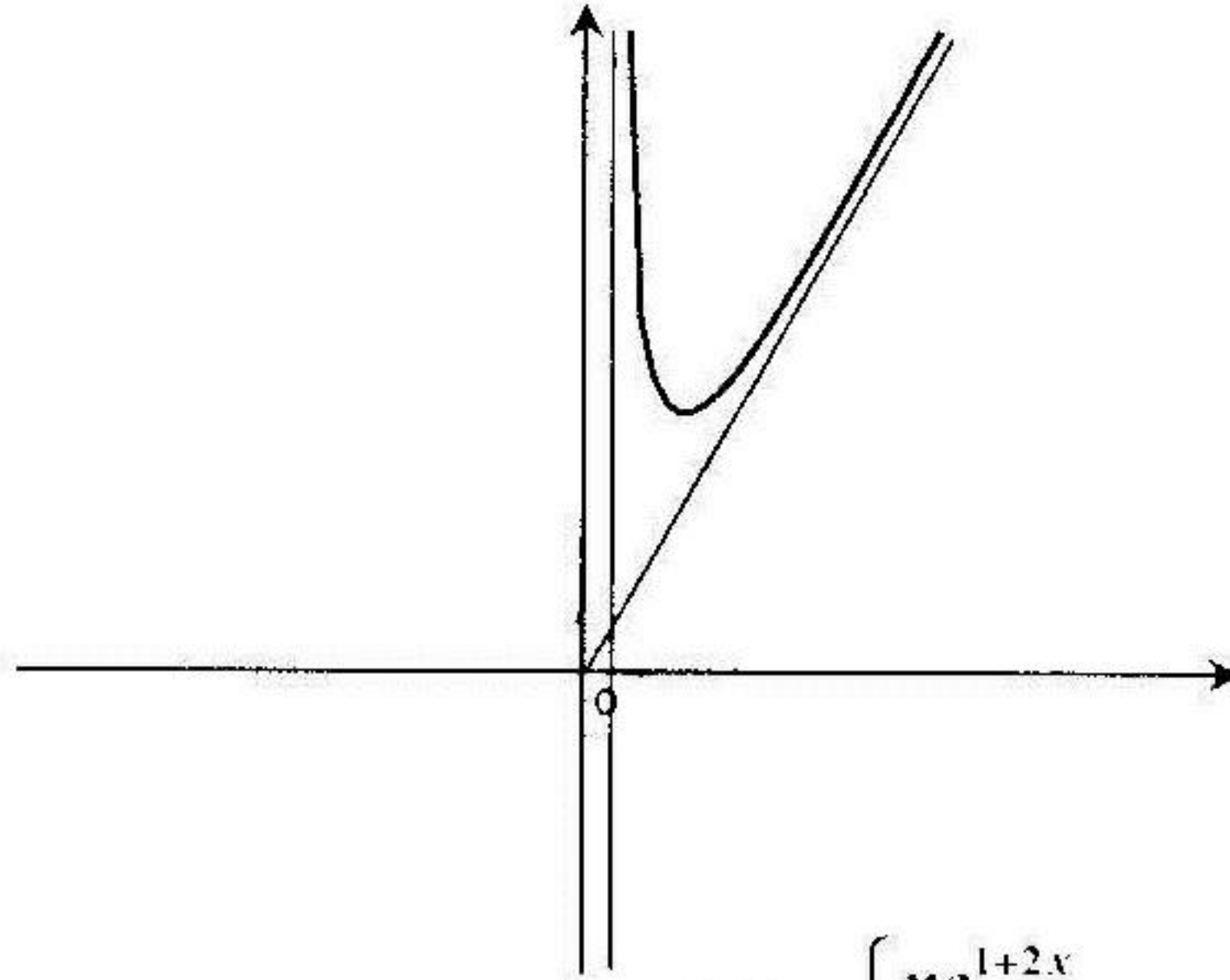
x	$\ln 2$	$\ln 5$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 10$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى

- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني في جوار $(+\infty)$

المنحني :



$$f(x) = \begin{cases} xe^{1+2x} & , x \leq 0 \\ x(1 - \ln x) & , x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

حساب النهايات :

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب المشتق : علي المجال $]-\infty, 0[$ لدينا $f'(x) = (1 + 2x)e^{1+2x}$

علي المجال $]0, +\infty[$ لدينا $f'(x) = -\ln x$

جدول التغيرات :

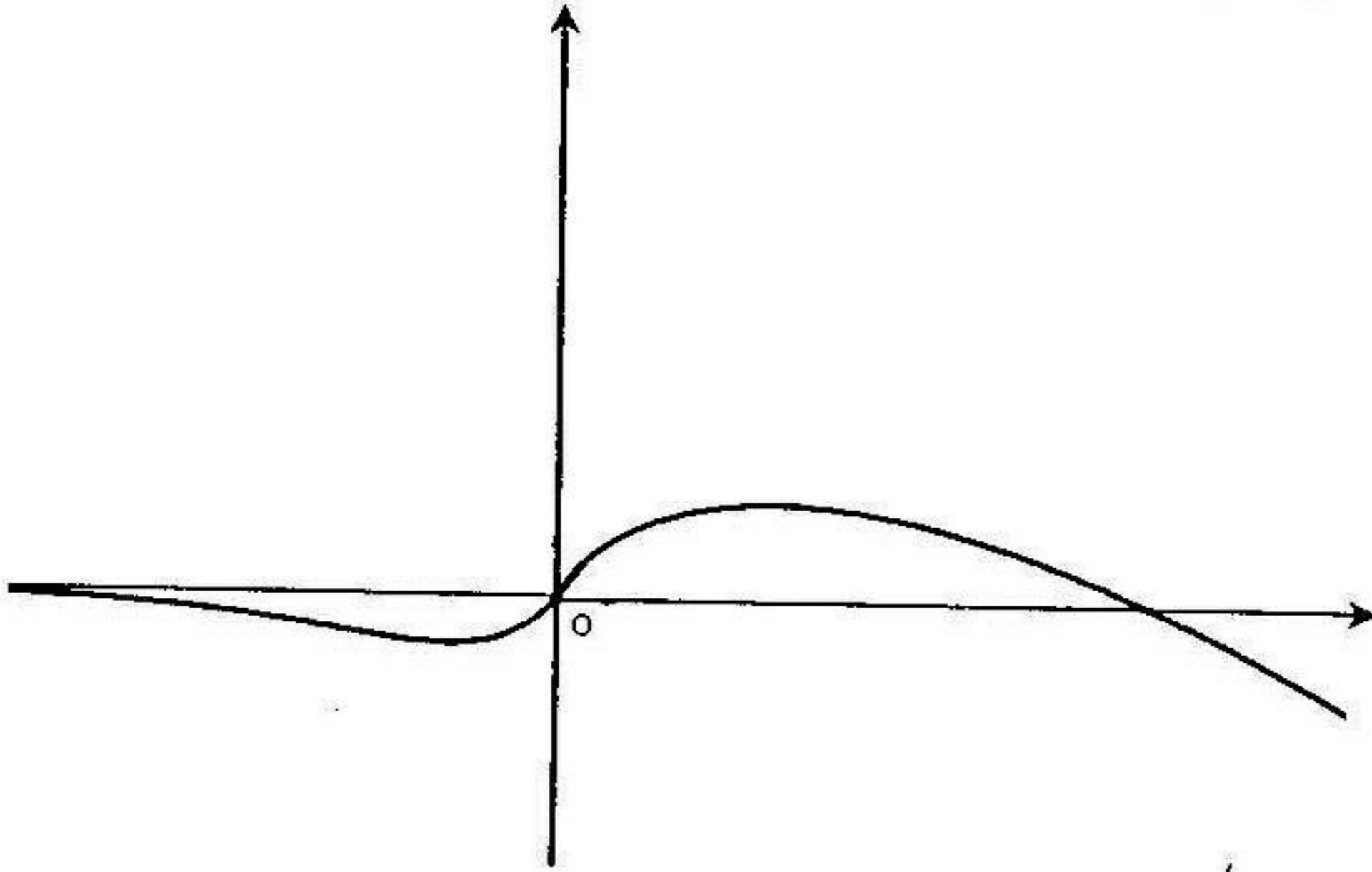
x	$-\infty$	$-1/2$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	\circ	$+$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$	0	$-1/2$		1	$-\infty$	

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$

- المنحنى له فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) \quad (4)$$

مجموعة التعريف :

$$D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

حساب النهايات :

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$

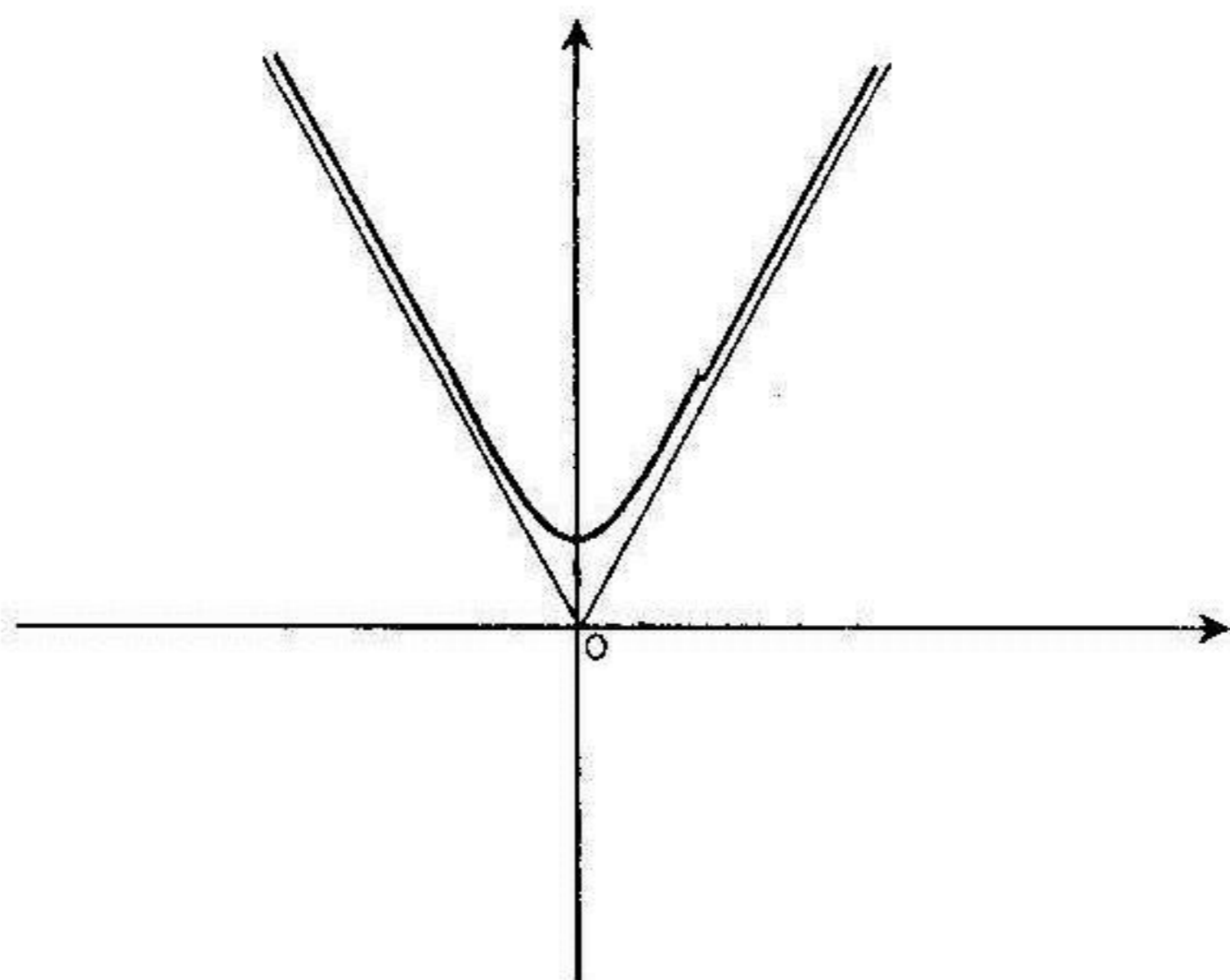
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\circ	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$
- المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



$$f(x) = x + \ln|e^x - 2| \quad (5)$$

$$D_f =]-\infty, \ln 2[\cup]\ln 2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

مجموعة التعريف :

حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x - 2}$$

حساب المشتق : من أجل كل $x \in D_f$:

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

4) أنشيء المنحني (c). (5-أ) أحسب مشتق الدالة g المعرفة بـ :

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي $g(x) = (x + \alpha) \ln(x + \alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

المحدد بالمنحني (c) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 0$, $x = 1$, $y = x + 3$.

II. نعتبر التحويل T الذي يحول النقطة $M(x; y)$ ذات الإحداثيات z إلى النقطة

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 3 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases} \text{ حيث } z' \text{ ذات الإحداثيات } z'$$

(1) أكتب z' بدلالة z واستنتج طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

(2) عين صورة المستقيم (Δ) بالتحويل T

مسألة 8

لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{x \ln x}{2 \ln x - 1}$ وليكن (c) المنحني البياني للدالة

f في معلم متعامد ومتجانس. (1-أ) أحسب $f(e)$, $f(e^{-1})$, $f(e^2)$.

(ب) أدرس تغيرات الدالة f. (2-أ) عين نقاط التقاطع للمنحني (c) مع (xx')

(ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c). (ج) أدرس على المجال $[0, +\infty[$ وضعياً

المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$

(3-أ) برهن بأن المنحني (c) يقبل في نقطة يطلب تعيينها مماساً يوازي

المستقيم (D) ذو المعادلة: $x - 2y + 1 = 0$. (ب) أنشيء المنحني (c).

(4) لتكن الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{|x \ln x|}{2 \ln x - 1}$

(أ) أدرس اشتقاق الدالة h عند النقطة $x = 1$ وفسر هندسياً النتيجة.

(ب) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إنشاء المنحني (Γ) للدالة h

مسألة 9

1. لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = |x - 1| - 2 \ln \frac{x}{x+1}$ وليكن (c) التمثيل

البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

(1-أ) عين مجموعة تعريف الدالة f. (ب) أدرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 1$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f.

(3) برهن على وجود عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]-2; 1[$ حيث $f(x_0) = 0$ وفسر هندسيا النتيجة .

(4) برهن بأن المنحني (c) يقبل مستقيمين مقاربين مانلين يطلب إعطاء معادلتهم.

(5) أنشي ϵ المنحني (c) والنصفي المماسين له عند النقطة $x = 1$

(6) أ- باستعمال التكامل بالتجزئة عين على المجال $]-1; 0[$ دالة أصلية للدالة :

ب- أحسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني $x \rightarrow \ln \frac{x}{x+1}$

(c) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=0, y=0, x=1$ حيث : $\lambda \in]0, 1[$

ج- أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow 0$

II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_n = f(n) - (n-1)$ حيث $(n \in \mathbb{N}^*)$

1- تحقق أن : $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. 2- أحسب : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

مسألة 10

1. نعتبر كثير الحدود $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

1- أ) أحسب $P(3)$. ب) استنتج تحليل $P(x)$ وأدرس إشارته .

2) لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) + 3 \ln \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$ نرمز بـ (c) إلى

تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس . أ) أحسب $f(-4), f(-3), f(0)$

ب) أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ) برهن أن المنحني (c) يقبل منحنى مقارب (Γ)

بطلب تعيينه . ب) أدرس وضعية المنحنيين (c) و (Γ) . ج) برهن أن على

المجال $]-4; -3[$ المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة $]-4; -3[$ حيث $x_0 \in$

د) برهن أن على المجال $]-2; 1[$ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد

4) أنشي ϵ المنحني (c) .

5- أ) عين دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \ln(x - \alpha)$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحنيين (c) و (Γ) والمستقيمين : $x = 3$ و $x = 4$

نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة $M'(x'; y')$

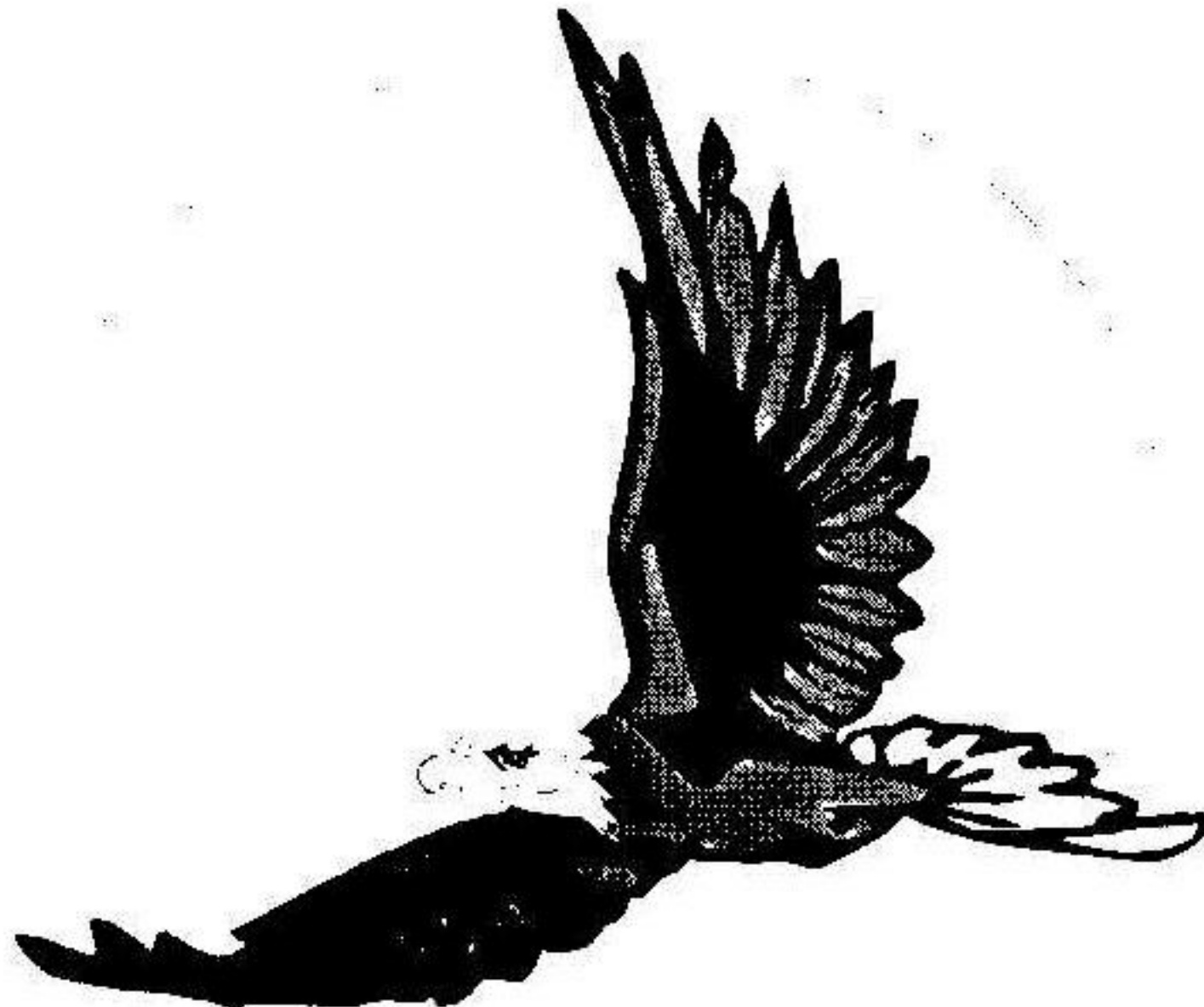
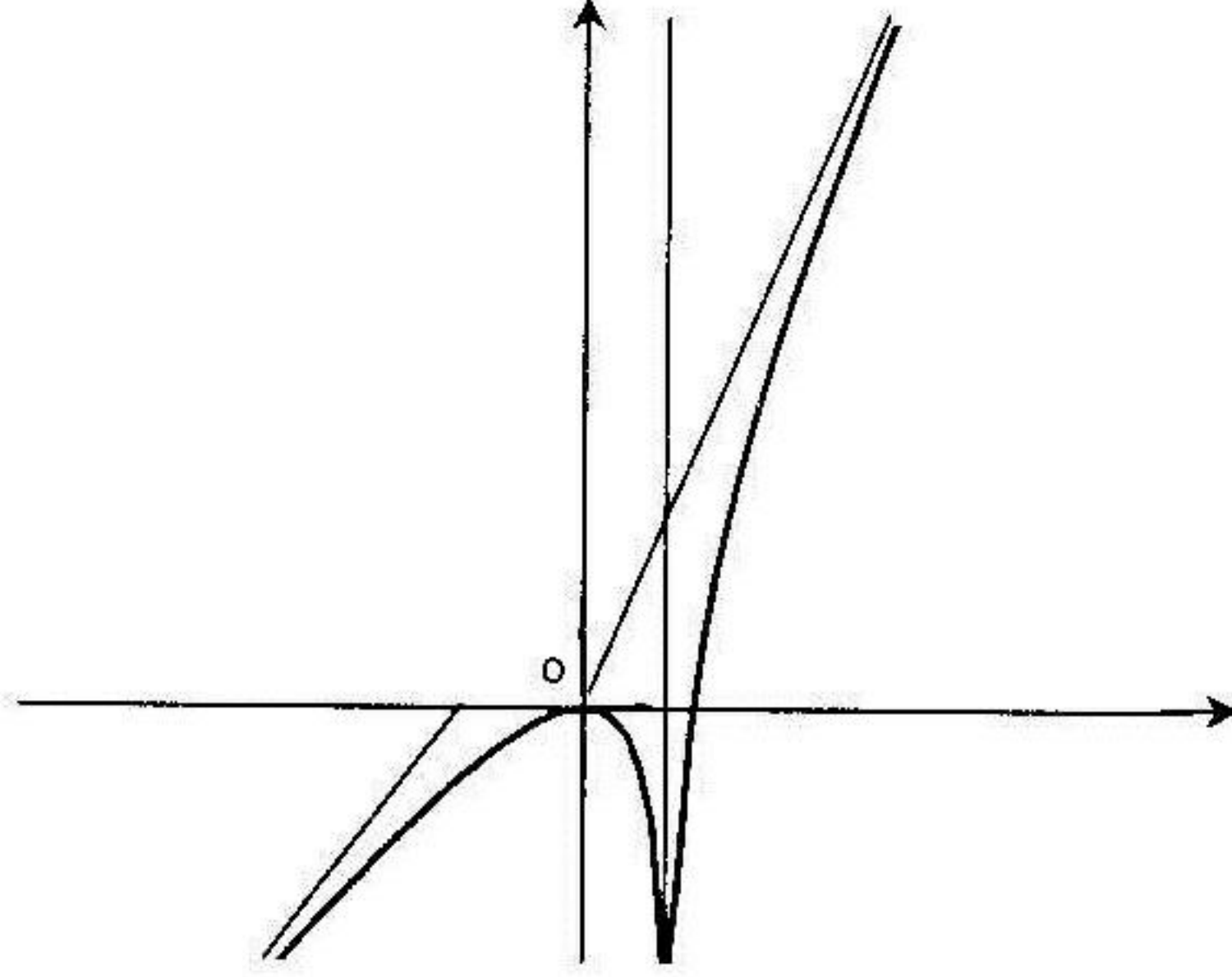
الفروع اللانهائية :

- المستقيم ذو المعادلة $x = \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى

- المستقيم ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(-\infty)$

- المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى في جوار $(+\infty)$

المنحنى :



مسائل محلولة

مسألة 1 :

(I) دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $g(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$

(1) برهن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ (ضع $x = 2K$)

(2) أدرس تغيرات الدالة g .

(3) استنتج من الدراسة السابقة أن من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$

(II) دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = (x-2)e^x + \ln|x-1|$

وليكن (C) منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

(1) - أ- عين مجموعة تعريف الدالة f .

ب- برهن أنه لكل عدد x من D_f : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x-1}$.

ج- أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

(3) أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 2$

(4) ارسم (C) .

(5) دالة عددية معرفة بـ: $h(x) = (x + \alpha)e^x$ حيث α عدد حقيقي.

أ- عين العدد α حتى تكون الدالة h دالة أصلية للدالة $e^x(x-2)$.

ب- باستخدام التكامل بالتجزئة عين على المجال $[1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة:

$\ln|x-1|$. ج- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.

د- λ عدد حقيقي حيث: $1 < \lambda \leq 2$. - احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي

المحدود بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما:

$x = 2$ و $x = \lambda$. - احسب $\lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow 1$.

الحل

(I) (1) إثبات أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{k \rightarrow -\infty} (2k)^2 e^{2k} = \lim_{k \rightarrow -\infty} 4 \times (k \times e^k)^2 = 0$$

(2) دراسة تغيرات الدالة g

$$D_g =]-\infty ; +\infty[\quad \text{مجموعة التعريف:}$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x - 2x e^x + e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1)e^x = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

$$g'(x) = (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x + 1) = (x^2 - 1)e^x : D_g \text{ لكل } x$$

$$g'(x) = 0 \text{ ومنه } (x^2 - 1)e^x = 0 \text{ ومنه } x^2 - 1 = 0 \text{ ومنه } x = -1 \text{ أو } x = +1$$

$$g'(x) > 0 \text{ يكافئ } (x^2 - 1)e^x > 0 \text{ ومنه } x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$$

$$g'(x) < 0 \text{ من أجل كل } x \in]-1 ; +1[$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	0	$\frac{4}{e}$	0	$+\infty$

(3) نستنتج من جدول تغيرات الدالة g أن لكل عدد x من \mathbb{R} : $g(x) \geq 0$.

(II) أ- مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا كان $x - 1 \neq 0$ ومنه $x \neq 1$ ومنه : $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$b \text{ - إثبات أنه لكل عدد } x \text{ من } D : f'(x) = \frac{g(x) + 1}{x - 1}$$

لكل عدد x من D_f :

$$f'(x) = e^x + e^x(x - 2) + \frac{1}{x - 1} = (x - 1)e^x + \frac{1}{x - 1}$$

$$= \frac{(x-1)^2 e^x + 1}{x-1} = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x + 1}{x-1} = \frac{g(x)+1}{x-1}$$

(ج) دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x) + \ln|x-1| = +\infty$$

(لأن $xe^x \rightarrow 0$ و $e^x \rightarrow 0$ لما $x \rightarrow -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

$$f'(x) = \frac{g(x)+1}{x-1} : \text{ لكل } x \text{ من } D_f$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$ لأن $g(x)+1 > 0$ لكل x من D_f .

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(2) دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (C):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} e^x + \frac{\ln|x-1|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x-2}{x} \right) e^x + \frac{\ln(1-x)}{(1-x)} \times \frac{1-x}{x} \right]$$

$$= (1 \times 0) + 0 \times (-1) = 0$$

في جوار $-\infty$ المنحنى (C) يقبل فرع مكافئ في اتجاه (xx') .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} e^x + \frac{\ln(x-1)}{(x-1)} \times \frac{x-1}{x}$$

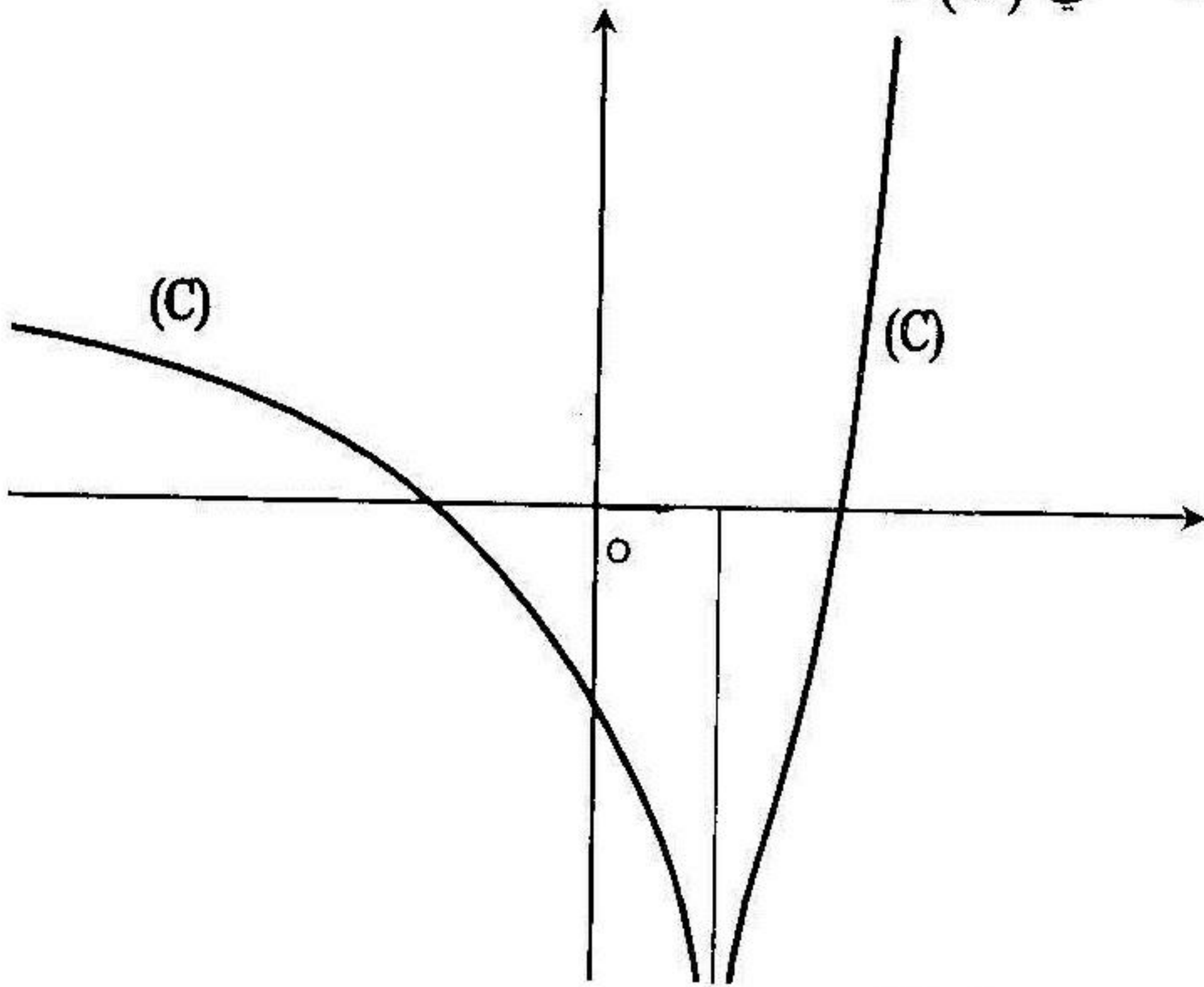
$$= +\infty \times 1 = +\infty$$

في جوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل فرع مكافئ في اتجاه (yy') .

(3) معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة $x = 2$:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = (e^2 + 1)(x-2) = (e^2 + 1)x - 2(e^2 + 1)$$

(4) رسم المنحني (C) :



(5) أ- تعيين العدد الحقيقي α :

الدالة h دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x-2)e^x$ يعني $h'(x) = (x-2)e^x$

ومنه $(x+\alpha+1)e^x = (x-2)e^x$ ومنه $x+\alpha+1 = x-2$ ومنه $\alpha = -3$.

$$\int (x-2)e^x dx = (x-3)e^x + c \quad (c \in \mathbb{R}) \text{ إذن}$$

ب- تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln|x-1|$ على المجال $]1; +\infty[$:

$$\int \ln|x-1| dx \text{ بوضع } u(x) = x \text{ ومنه } u'(x) = 1$$

$$\text{و } v(x) = \ln|x-1| \text{ ومنه } v'(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$\int \ln|x-1| dx = x \times \ln|x-1| - \int \frac{x}{x-1} dx = x \times \ln|x-1| - \int \left(1 + \frac{x}{x-1}\right)$$

$$= x \times \ln|x-1| - x - \ln|x-1| + c = (x-1) \ln|x-1| - x + c$$

وعلى المجال $]1; +\infty[$ فإن : $\int \ln|x-1| dx = (x-1)\ln(x-1) - x + c$
 ج - استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

$$\int f(x) dx = \int (x-2)e^x dx + \int \ln|x-1| dx$$

$$= (x-3)e^x + (x-1)\ln(x-1) - x + c$$

د - حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda) = - \int_{\lambda}^2 f(x) dx = - \left[(x-3)e^x + (x-1)\ln(x-1) - x \right]_{\lambda}^2$$

$$= - \left(-e^2 - 2 \right) + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda$$

$$= e^2 + 2 + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda \quad (u.a)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left[e^2 + 2 + (\lambda-3)e^{\lambda} + (\lambda-1)\ln(\lambda-1) - \lambda \right]$$

$$= (e^2 - 2e + 1) \quad (u.a)$$

مسألة 2 :

(I) لتكن الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x - 1 + \ln(e^x + 2e^{-x} - 3)$ وليكن (C) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- عين المجموعة D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- تحقق أنه من أجل كل $x \in D_f$ فإن $f(x) = -1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f .

(3) أبرهن بأن المنحني (C) يقطع (xx') في النقطة $x_0 \in]\ln 3; \ln 4[$.

ب- برهن أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

(4) أنشئ المنحني (C).

(II) نعتبر المعادلة التفاضلية (*) $y' - y = e^{2x} - 2$

(1) تحقق بأن الدالة g المعرفة بـ $g(x) = e^{2x} - 3e^x + 2$ هي حلا للمعادلة (*).

(2) نضع $z = y - g$.

أ- برهن أن y هي حل للمعادلة (*) إذا و فقط إذا كان z حل للمعادلة

$$z' - z = 0 \quad (2)$$

- ب- حل المعادلة (2) ، ثم استنتج حلول المعادلة (*).
 ج عين حلا للمعادلة (*) و الذي يحقق $y(0) = 1$.

الحل

(1) (أ-1) تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

f معرفة إذا كان $(e^x + 2e^{-x} - 3) > 0$ ومنه $(e^x + \frac{2}{e^x} - 3) > 0$ ومنه

$$e^{2x} - 3e^x + 2 > 0 \text{ ومنه } \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x} > 0$$

بوضع $e^x = z$ فإن $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ يكافئ $z^2 - 3z + 2 = 0$ ومنه
 ($z_1 = 2$ أو $z_2 = 1$) ومنه ($x_1 = \ln z_1 = \ln 2$ أو $x_2 = \ln z_2 = \ln 1 = 0$)
 $(e^x - 2)(e^x - 1) > 0$ ومنه $(z - z_1)(z - z_2) > 0$ ومنه $z^2 - 3z + 2 > 0$

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 2$		-	0	+
$e^x - 1$	-	0		+
$(e^x - 2)(e^x - 1)$	+	0	-	+

$$x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[\text{ من أجل كل } (e^x - 2)(e^x - 1) > 0$$

$$\text{إذن : } D_f =]-\infty; 0[\cup]\ln 2; +\infty[$$

ب- التحقق بأن $f(x) = -1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$

من أجل كل $x \in D_f$:

$$f(x) = x - 1 + \ln(e^x + 2e^{-x} - 3) = x - 1 + \ln \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x}$$

$$= x - 1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - \ln e^x$$

$$= x - 1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - x$$

$$= -1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2)$$

(2) دراسة تغيرات الدالة f

حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) = -1 + \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \ln(e^x + 2e^{-x} - 3) = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة اشارته: لكل x من D_f :

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 3e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2e^{2x} - 3e^x$

(لأن من أجل كل $x \in D_f$: $e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$)

$$f'(x) = 0 \text{ ومنه } 2e^{2x} - 3e^x = 0 \text{ ومنه } e^x(2e^x - 3) = 0 \text{ ومنه } e^x = \frac{3}{2} \text{ ومنه}$$

$$f'(x) > 0 \text{ يكافئ } e^x(2e^x - 3) > 0 \text{ . } x = \ln \frac{3}{2} \notin D_f$$

ومنه ($2e^x - 3 > 0$ و $x \in D_f$) ومنه $x > \ln 2$

$$f'(x) < 0 \text{ ومنه } e^x(2e^x - 3) < 0 \text{ ومنه } (x \in D_f \text{ و } x < \ln \frac{3}{2}) \text{ ومنه } x < 0$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$-1 + \ln 2$			$+\infty$

Diagram showing the behavior of the function $f(x)$ as x approaches $-\infty$ and $+\infty$. The function decreases from $-1 + \ln 2$ at $x = -\infty$ to $-\infty$ at $x = \ln 2$, and then increases from $-\infty$ at $x = \ln 2$ to $+\infty$ at $x = +\infty$.

(3) أ- البرهان بأن المنحني (C) يقطع (xx') في النقطة $x_0 \in]\ln 3; \ln 4[$

$$f(\ln 3) = -1 + \ln(e^{2\ln 3} - 3e^{\ln 3} + 2)$$

$$= -1 + \ln(e^{\ln 9} - 3 \times 3) + 2$$

$$= -1 + \ln(9 - 9 + 2) = -1 + \ln 2 > 0$$

$$f(\ln 4) = -1 + \ln(e^{2\ln 4} - 3e^{\ln 4} + 2)$$

$$= -1 + \ln(16 - 12 + 2) = -1 + \ln 6 < 0$$

على المجال $[\ln 3; \ln 4]$ الدالة f مستمرة و متزايدة و $f(\ln 3) \times f(\ln 4) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمنحنى (C) يقطع (xx') في نقطة وحيدة

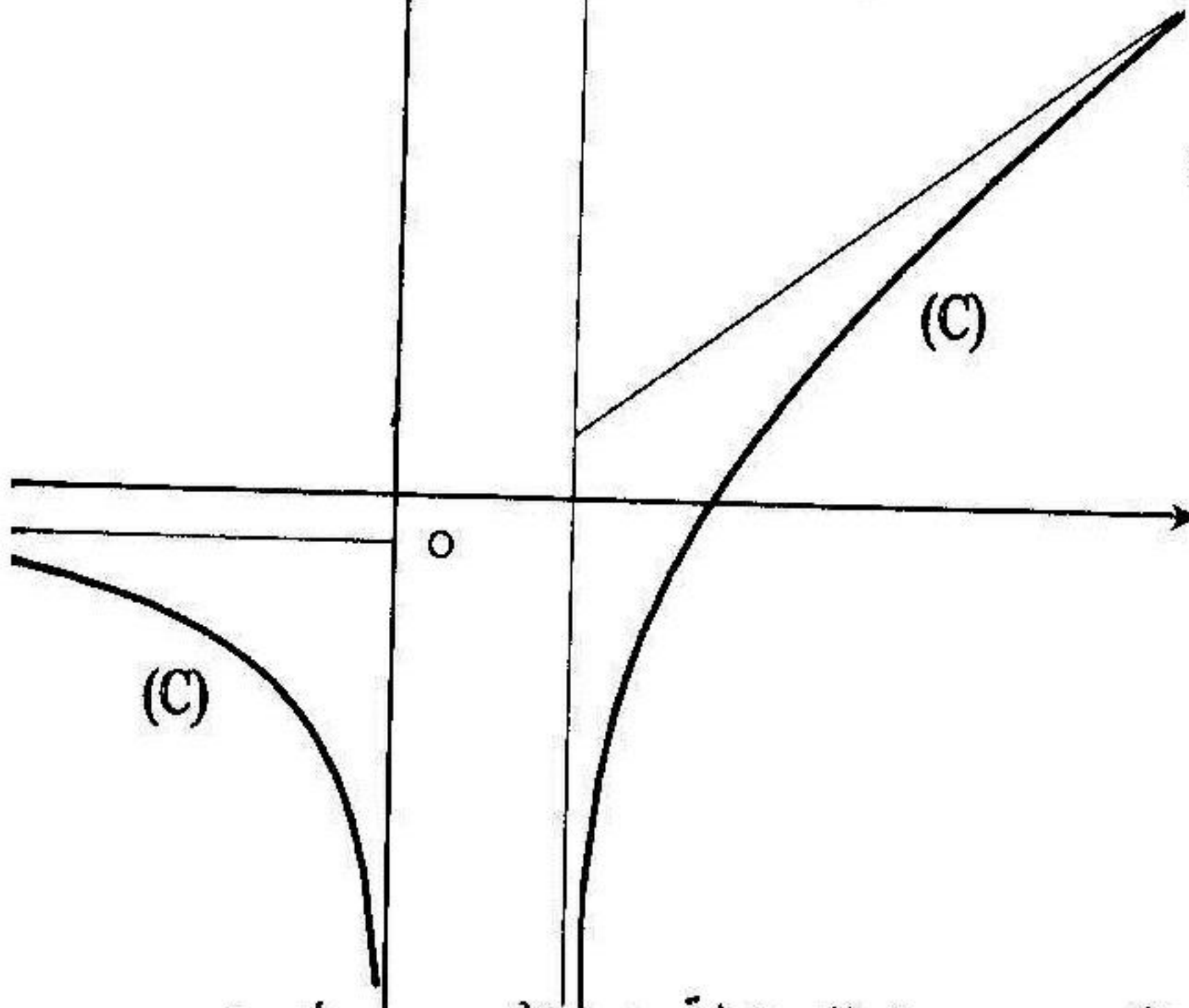
$$x_0 \in]\ln 3; \ln 4[$$

ب- إثبات أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب لـ (C) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-1 + \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - (2x - 1)] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{2x} - 3e^x + 2) - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln e^{2x} (1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}) - 2x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^{2x} + \ln(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}) - 2x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}) - 2x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - 3e^{-x} + 2e^{-2x}) = 0 \end{aligned}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C) في جوار $(+\infty)$.

(4) رسم المنحنى (C) :



(II) التحقق بأن الدالة g هي حل للمعادلة $y' - y = e^{2x} - 2$:

$$g'(x) - g(x) = (2e^{2x} - 3e^x) - (e^{2x} - 3e^x + 2) = e^{2x} - 2$$

إذن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = e^{2x} - 3e^x - 2$ هي حل للمعادلة

$$y' - y = e^{2x} - 2$$

(2) أ- إثبات أن y حل للمعادلة (*) إذا و فقط إذا كان z حل للمعادلة $z' - z = 0$

لدينا $z = y - k$ ومنه $y = z + k$. y حل للمعادلة (*) يكافئ $y' - y = e^{2x} - 2$

$$(z' - z) + (k' - k) = e^{2x} - 2 \text{ يكافئ } (z + k)' - (z + k) = e^{2x} - 2$$

(لكن $k'(x) - k(x) = e^{2x} - 2$ ، إذن تكون y حل للمعادلة (*) إذا كان z حلا

$$\text{للمعادلة } z' - 2z = 0 .$$

ب- حلول المعادلة $z' - 2z = 0$:

$$z' - 2z = 0 \text{ ومنه } z' = 2z \text{ ومنه } z = \lambda e^{2x} \text{ (حيث } \lambda \in \mathbb{R} \text{)}$$

و تكون حلول المعادلة (*) هي : $y = z + k = \lambda e^{2x} + e^{2x} - 3e^{2x} + 2$

ج - تعيين حل المعادلة (*) و الذي يحقق $y(0) = 1$:

نعلم أن مجموعة حلول المعادلة (*) هي $y = \lambda e^{2x} + e^{2x} - 3e^{2x} + 2$ ومنه :

$$y(0) = 1 \text{ يكافئ } \lambda + 1 - 3 + 2 = 1 \text{ ومنه } \lambda = 1 .$$

إذن الحل المطلوب هو الحل المعرف بـ : $y = e^{2x} - 3e^{2x} + 2$.

مسألة 3

I. دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ : $g(x) = \frac{2x-2}{x-2} - e^x$.

(1) أحسب $g(0)$ وادرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; -2[$

II. لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = 2x - e^x + 2 \ln(2-x)$ وليكن

(C) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

(1) ادرس تغيرات الدالة f . (2) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α, β حيث :

$$-0,8 < \alpha < -0,9 \text{ و } 0,6 < \beta < 0,9 \text{ وفسر هندسيا النتيجة .}$$

(3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

(4) أ) أثبت أن المعادلة $-e^x + 2 \ln(2-x) = 0$ تقبل حل وحيد x_0 حيث $x_0 \in]0; 1[$.

ب) استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$.
 5) أرسم المنحني (C). (6-1) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين على المجال $]-\infty; 2[$
 دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln(2-x)$. ب) احسب بـ (cm^2) المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (C) والمستقيمتين $x = \lambda$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، وأحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 2^-} S(\lambda)$

الحل

I. 1) حساب $g(0)$ ودراسة تغيرات الدالة g

$$g(0) = 0$$

مجموعة تعريف: $D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

حساب المشتق: من أجل كل $x \in D_g$:

$$g'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-2)}{(x-2)^2} - e^x = -\left(\frac{2}{(x-2)^2} + e^x \right) < 0$$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-		-
$g(x)$	2 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 2[$

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أن إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 2[$ هي كما يلي:

$g(x) > 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; 0[$ و $g(x) < 0$ من أجل كل $x \in]0; 2[$

II. 1) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف الدالة f : $D_f =]-\infty; 2[$

حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [2x - e^x + 2 \ln(2-x)] = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2 \ln(2-x)}{x} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2 \ln(2-x)}{2-x} \times \frac{2-x}{x} \right] = -\infty$$

(لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(2-x)}{2-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{x} = -1$)

حساب المشتق ودراسة إشارته : من أجل كل $x \in D_f$

$$. f'(x) = 2 - e^x + \frac{2}{x-2} = \frac{2x-2}{x-2} - e^x = g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$.

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	0	2
$f'(x)$	$+$	\circ	$-$
$f(x)$			

(2) إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$$-0,9 < \alpha < -0,8 \quad \text{و} \quad 0,6 < \beta < 0,9$$

$$f(-0,9) = -0,07 \quad , \quad f(-0,8) = 0,009$$

$$f(0,6) = 0,06 \quad , \quad f(0,7) = -0,08$$

الدالة f مستمرة ومنتزادة في المجال $[-0,9; -0,8]$ والعدد 0 محصور بين

$f(-0,9)$ و $f(-0,8)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل

وحيد α حيث $-0,9 < \alpha < -0,8$. باستعمال نفس الطريقة (مبرهنة القيم المتوسطة)

نبرهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β حيث : $0,6 < \beta < 0,9$.

ونفسر هندسيا النتيجة بأن المنحني (C) يقطع محور الفواصل في نقطتين
فاصلتهما α و β .

(3) دراسة الفروع اللانهائية للمنحني (C)

المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2 \ln(2-x)}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 - \frac{e^x}{x} + \frac{2 \ln(2-x)}{2-x} \times \frac{2-x}{x} \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-e^x + 2 \ln(2-x)] = +\infty$$

إذن في جوار $(-\infty)$ المنحني (C) له فرع قطع مكافئ في اتجاه المستقيم ذو
المعادلة $y = 2x$

4- أ) إثبات أن المعادلة $-e^x + 2 \ln(2-x) = 0$ تقبل حل حيد $x_0 \in]0; 1[$
على المجال $]0; 1[$ الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = -e^x + 2 \ln(2-x)$ مستمرة
و $h(1) = -e < 0$, $h(0) = -1 + 2 \ln 2 > 0$, ومن أجل كل $x \in]0; 1[$ لدينا :

$$]0; 1[\text{ المجال } , h'(x) = -e^x - \frac{2}{2-x} < 0$$

والعدد 0 محصور بين $f(0)$ و $f(1)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة:

$$-e^x + 2 \ln(2-x) = 0 \text{ تقبل حل وحيد } x_0 \in]0; 1[$$

ب) استنتاج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

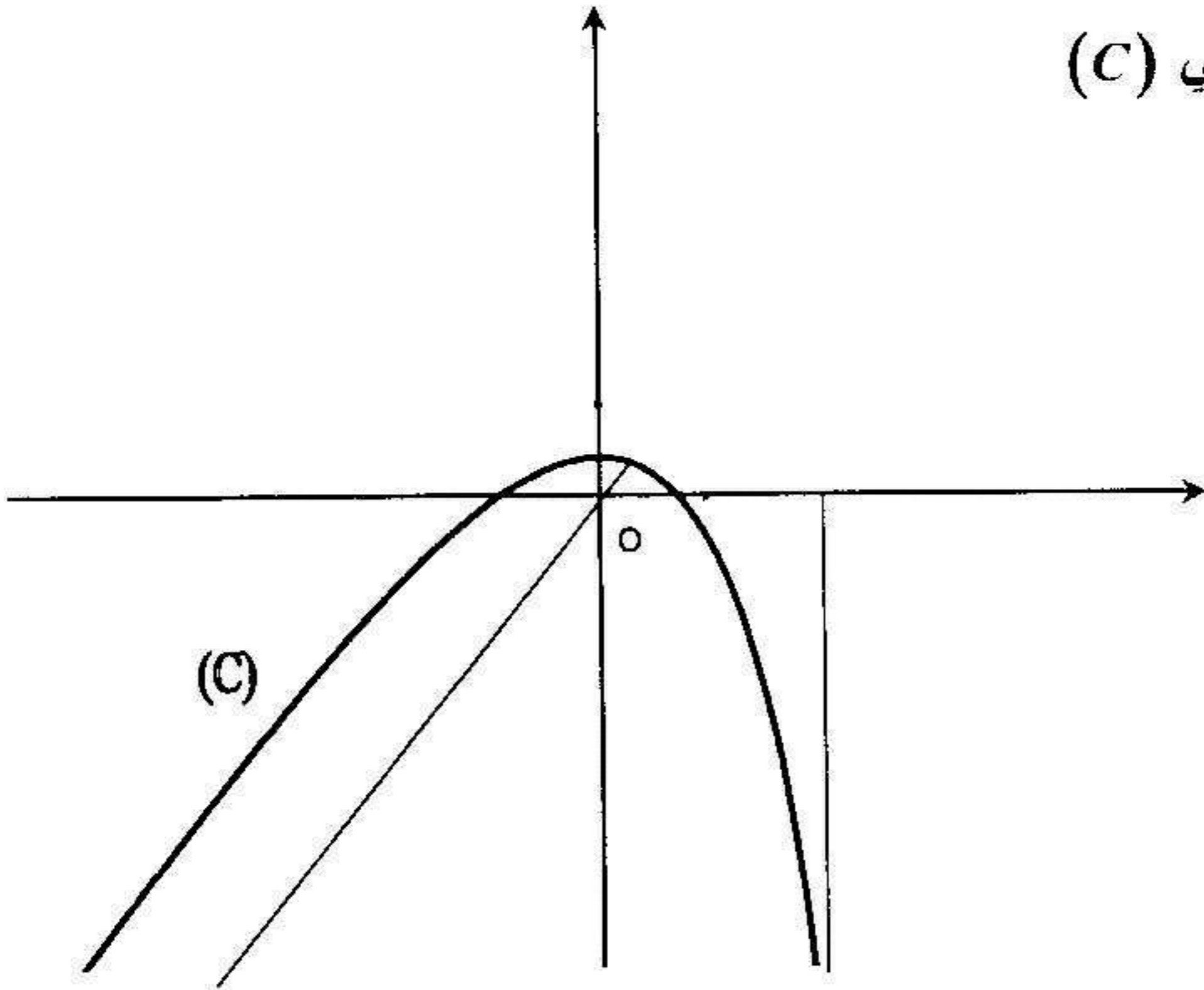
$$f(x) - 2x = -e^x + 2 \ln(2-x) = h(x) \text{ حسب السؤال السابق المعادلة}$$

$$h(x) = 0 \text{ تقبل حل وحيد إذن المنحني (C) و } (\Delta) \text{ يتقاطعان في النقطة } x_0$$

$$h(x) > 0 \text{ من أجل } x \in]-\infty; x_0[\text{ ويكون على هذا المجال (C) فوق } (\Delta)$$

$$h(x) < 0 \text{ من أجل } x \in]x_0; 2[\text{ ويكون على هذا المجال (C) تحت } (\Delta)$$

(5) رسم المنحني (C)



6- أ) تعيين على المجال $]-\infty; 2[$ دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow \ln(2-x)$

نستعمل الكاملة بالتجزئة لحساب $\int \ln(2-x) dx$. بوضع $u'(x) = 1$

ومنه $u(x) = x$ ، و $v(x) = \ln(2-x)$ ومنه $v'(x) = -\frac{1}{2-x}$

$$\int \ln(2-x) dx = x \ln(2-x) + \int \frac{x}{2-x} dx =$$

$$= x \ln(2-x) + \int \left(-1 + \frac{2}{2-x} \right) dx = x \ln(2-x) - x - 2 \ln(2-x) =$$

$$= (x-2) \ln(2-x) - x + c$$

ب) حساب بـ $S(\lambda)$ المساحة (cm^2)

$$S(\lambda) = - \int_1^e f(x) dx = - \int_1^e [2x - e^x + 2 \ln(2-x)] dx =$$

$$= - \left[x^2 - e^x + 2(x-2) \ln(2-x) - 2x \right]_1^e =$$

$$= \left(-\lambda^2 + e^\lambda - 2(\lambda-2) \ln(2-\lambda) + 2\lambda \right) + (-e-1) =$$

$$= \left(-\lambda^2 + e^\lambda - 2(\lambda-2) \ln(2-\lambda) + 2\lambda - e - 1 \right) \times 4cm^2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 2} S(\lambda) = (e^2 - e - 1) \times 4cm^2$$

$$\left(\lim_{\lambda \rightarrow 2} (\lambda - 2) \ln(2 - \lambda) = - \lim_{\lambda \rightarrow 2} (2 - \lambda) \ln(2 - \lambda) = 0 \text{ لأن} \right)$$

مسألة 4

I. لتكن الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}} , & x < 0 \\ f_2(x) = x(-2 + \ln x) \times \ln x , & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نرمز بـ (C) إلى المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \bar{i}; \bar{j})$.

$$1- أ) برهن أن $\lim_{x \rightarrow 0} x \times (\ln x)^2 = 0$ (يمكنك وضع $x = h^2$)$$

ب) برهن بأن الدالة f هي مستمرة عند النقطة $x = 0$

ج) أدرس اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$. (2) أدرس تغيرات الدالة f

3- أ) برهن بأن المستقيم $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

$$\text{(يمكنك كتابة } f(x) - x = x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{x}} \text{ ولحساب هذه النهاية ضع } h = \frac{1}{x} \text{)}$$

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، ماذا نستنتج ؟

4) أنشئ (C) .

$$5- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب: $\int_1^e x \ln x dx$, $\int_1^e x (\ln x)^2 dx$$$

ب) أحسب المساحة S المحددة بالمنحني (C) والمستقيمتين $x = 1, x = e, y = 0$

II. نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x'; y')$

$$\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ حيث :}$$

1) عين مجموعة النقاط الصامدة للتحويل S .

2) برهن بأن التحويل S هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة .

(3) عين معادلة (C') صورة المنحني (C) في المجال $]-\infty; 0[$ بالتحويل S .

الحل

I. (أ-1) البرهان أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

لحساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2$ نضع $x = h^2$ (لما $x \rightarrow 0^+$ فإن $h \rightarrow 0^+$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 (\ln h^2)^2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 (2 \ln h)^2 =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} 4h^2 (\ln h)^2 = \lim_{h \rightarrow 0^+} 4(h \ln h)^2 = 0$$

(ب) البرهان أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

- استمرار الدالة f على يسار $x = 0$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ لأن } \right) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة على يسار $x = 0$.

- استمرار الدالة f على يمين $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(-2 + \ln x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-2x \ln x + x(\ln x)^2] = 0$$

إذن الدالة f مستمرة على يمين $x = 0$. بما أن f مستمرة على يمين و على يسار

$x = 0$ فالدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$

(ج) دراسة اشتقاق الدالة f عند النقطة $x = 0$

- اشتقاق الدالة f على يسار $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \text{ و } \lim_{u \rightarrow -\infty} u e^u = 0 \text{ (بوضع } u = \frac{1}{x} \text{)}$$

فالدالة f قابلة للاشتقاق على يسار $x = 0$

- اشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 + \ln x) \times \ln x = +\infty$$

فالدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x = 0$ ؛ إذن الدالة f غير قابلة الاشتقاق عند $x = 0$.

(2) دراسة تغيرات الدالة f

مجموعة تعريف: $D_f =]-\infty; +\infty[$

حساب النهايات:

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \text{ لأن } \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times (-2 + \ln x) \times \ln x = +\infty$$

حساب المشتق ودراسة إشارته:

- على المجال $]-\infty; 0[$:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} > 0$$

(لأن $e^{\frac{1}{x}} > 0$ و $x^2 - x + 1 > 0$)

- على المجال $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = f_2'(x) = (-2 + \ln x + 1)\ln x + \frac{1}{x}(-2x + x \ln x) =$$

$$= (-1 + \ln x)\ln x + (-2 + \ln x) = (\ln x)^2 - 2$$

$$\ln x = -\sqrt{2} \text{ أو } \ln x = \sqrt{2} \text{ ومنه } (\ln x)^2 - 2 = 0 \text{ ومنه } f_2'(x) = 0$$

$$\text{ومنه: } x = e^{-\sqrt{2}} \text{ أو } x = e^{\sqrt{2}}$$

x	0	$e^{-\sqrt{2}}$	$e^{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$\ln x + \sqrt{2}$	-	0	+	+	
$\ln x - \sqrt{2}$	-	-	0	+	
$f_2'(x)$	+	0	-	0	+

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$e^{-\sqrt{2}}$	$e^{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$		$f(e^{-\sqrt{2}})$	$f(e^{\sqrt{2}})$	$+\infty$

3- أ) البرهان بأن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \times \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) - e^{\frac{1}{x}} \right]$$

بوضع $h = \frac{1}{x}$ ومنه : لما $x \rightarrow -\infty$ فإن $h \rightarrow 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 1 - 1 = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

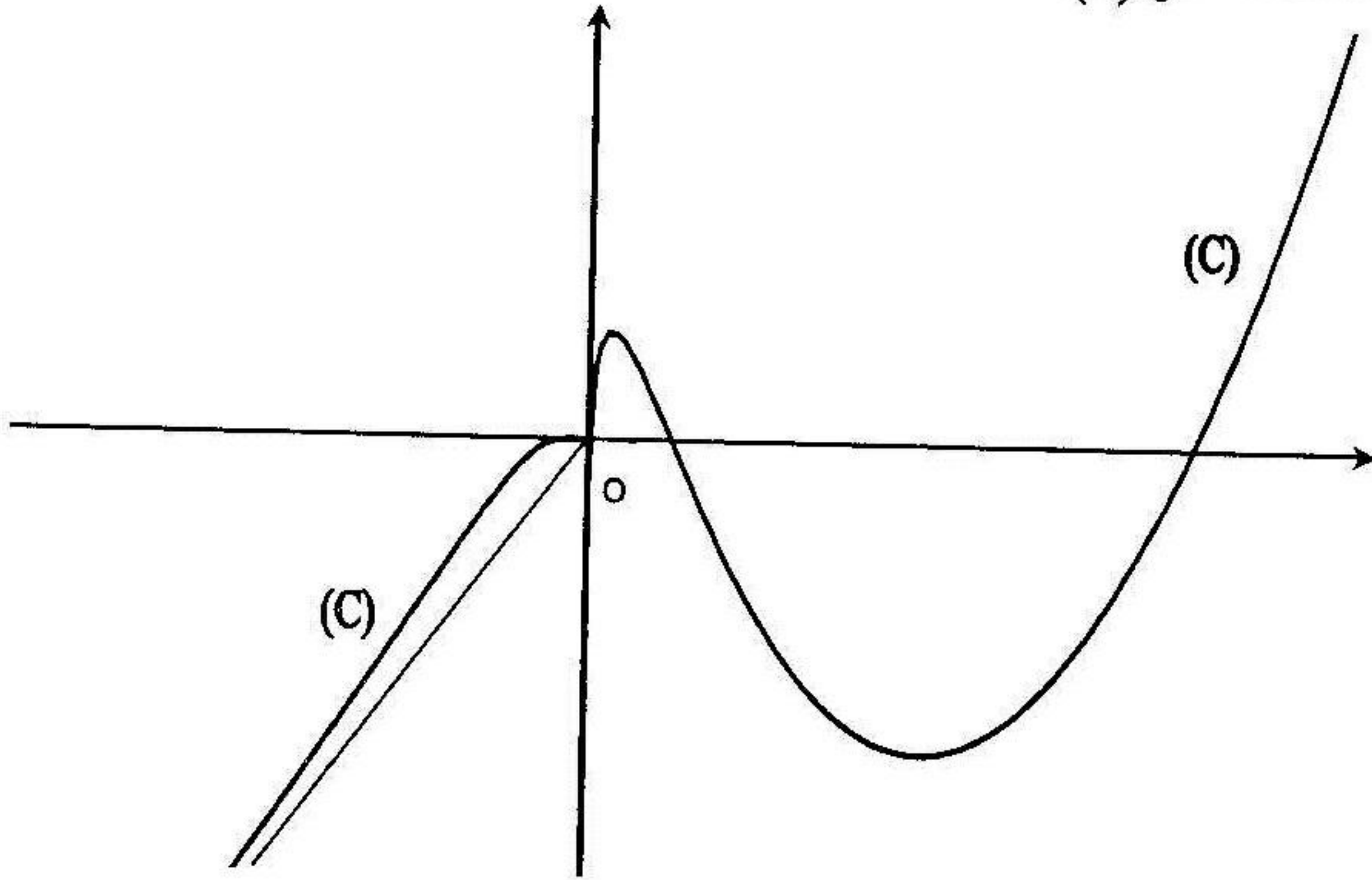
إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) في جوار $(-\infty)$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + \ln x) \times \ln x = +\infty \text{ ومنه المنحني (C) له في}$$

جوار $(+\infty)$ فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب

(4) إنشاء المنحني (c)



5- (أ) حساب $\int_1^e x \ln x dx$, $\int_1^e x (\ln x)^2 dx$

- حساب $\int_1^e x \ln x dx$: بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$

و $v(x) = \ln x$ ومنه $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

- حساب $\int_1^e x (\ln x)^2 dx$: بوضع $u'(x) = x$ ومنه $u(x) = \frac{x^2}{2}$

و $v(x) = (\ln x)^2$ ومنه $v'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

$$\int_1^e x (\ln x)^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} \times (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \times (\ln x)^2 \right]_1^e - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4}$$

حساب المساحة المحددة بالمنحني (c) والمستقيمات: $x = 1, x = e, y = 0$

$$S = - \int_1^e f(x) dx = - \int_1^e f_2(x) dx = - \int_1^e [-2x \ln x + x \ln^2 x] dx =$$

$$= \int_1^e 2x \ln x dx - \int_1^e x \ln^2 x dx = 2 \left(\frac{e^2 + 1}{4} \right) - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 3) (u.a)$$

II. 1) مجموعة النقاط الصامدة للتحويل S

ومنه $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ نقطة صامدة بالتحويل S يعني $S(M) = M$ ومنه:

$$\varpi(-1; -2) \text{ وحيدة صامدة وحيدة } S \text{ له نقطة صامدة وحيدة } \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} y + 2 = 0 \\ -x - 1 = 0 \end{cases}$$

(2) البرهان بأن التحويل S هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة

$$z' = x' + iy' = (x + y + 2) + i(-x + y - 1) = x + iy - ix + y + 2 - i =$$

$$= x + iy - ix - i^2 y + 2 - i = (x + iy) - i(x + iy) + 2 - i =$$

$$= (1 - i)(x + iy) + (2 - i) = (1 - i)z + (2 - i)$$

بما أن $z' = (1 - i)z + (2 - i)$ هو من الشكل $z' = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| \neq 1$

فالتحويل S هو تشابه نسبه $|1 - i| = \sqrt{2}$ وزاويته $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ ومركزه

النقطة الصامدة $\varpi(-1; -2)$.

(3) معادلة (C') صورة المنحني (C) في المجال $]-\infty; 0[$ بالتحويل S

$$S^{-1}(M') = M \text{ ومنه } \begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases} \text{ لدينا } S(M) = M' \text{ حيث:}$$

$$\begin{cases} x = 1/2(x' - y' - 3) \\ y = 1/2(x' + y' - 1) \end{cases} \text{ حيث :}$$

ونعلم ان معادلة (C) على المجال $]-\infty; 0[$ هي $y = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ومنه

$$\text{معادلة (C')} \text{ هي : } 1/2(x' + y' - 1) = (1/2x' - 1/2y' - 5/2)e^{\frac{1}{1/2(x'-y'-3)}}$$

دوال مركبة مقترحة للدراسة

أدرس دراسة كاملة (تغيرات ، الفروع اللانهائية ، رسم المنحني) لكل من الدوال الآتي:

$$1) f(x) = x + 1 + \ln|e^x - 1| \quad , \quad 2) f(x) = e^x + x(\ln x - 1 - e)$$

$$3) f(x) = e^x + \ln \frac{x-1}{x+1} \quad , \quad 4) f(x) = e^{2x} + \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$5) f(x) = e^x - (e^x - 1)\ln(e^x - 1) \quad , \quad 6) f(x) = x + \ln|e^x - e^{-x}|$$

$$7) f(x) = e^{\frac{1}{x} + \ln|2x+1|} \quad , \quad 8) f(x) = 2e^x + 2^{-x}$$

$$9) \begin{cases} f(x) = x - 1 + e^{2-x} \quad , \quad x \in [2; +\infty[\\ f(x) = -x + 4 + 2\ln(x-1) \quad , \quad x \in]1; 2[\end{cases}$$

$$10) \begin{cases} f(x) = (x^2 - 1)e^x \quad , \quad x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{2 - \ln x} \quad , \quad x > 0 \end{cases}$$

مسائل مقترحة للحل

مسألة 1

نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + e^x & ; \quad \forall x \in]-\infty; 0] \\ f_2(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x} & ; \quad \forall x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

نرمز بالرمز (c) لمنحني الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

1- (أ) برهن بأن الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0 .

2) g دالة معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + 2 \ln \frac{x+1}{x}$$

(أ) أدرس تغيرات الدالة g . (ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3- (أ) برهن بأن : $f'(x) = x \times g(x)$. (ب) أدرس تغيرات الدالة f

4- (أ) برهن أن في جوار $(-\infty)$ المنحني (c) له مستقيم مقارب معادلته $y = -x - 1$

(ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (5) أنشئ المنحني (c)

(6) λ عدد حقيقي سالب ، أحسب المساحة $S(\lambda)$ المحصورة بين المنحني (c)

والمستقيمات التي معادلاتها : $y = -x - 1$ ، $x = \lambda$ ، $x = 0$. ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{e^x} & ; \quad x \leq 0 \\ f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{\ln x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

(c) هو الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1- (أ) برهن بأن الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$

ب) أدرس تغيرات الدالة f

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c). (3) أنشئ المنحنى (c)

4- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب $\int x^2 e^{-x} dx$

ب) أحسب المساحة المحصورة بين المنحنى (c) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$.x = -2, x = -1, y = 0$$

(5) لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = 1 - \frac{x^2}{\ln|x|}$

(ا) برهن بأن g دالة زوجية . ب) باستعمال المنحنى (c) أنشئ المنحنى (Γ) للدالة g

مسألة 3

f دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x[1 - \ln(-x)]} & ; x < 0 \\ (x+1)e^{-2x} - e^x & ; x \geq 0 \end{cases}$$

(c) الممثل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1- أ) أدرس اشتقاق الدالة f على يمين $x = 0$. ب) أدرس تغيرات الدالة f

2- أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) . ب) أنشئ المنحنى (c)

3) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x) = 2m + 1$

4- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_{\ln 2}^1 (x+1)e^{-2x} dx$

ب) أحسب المساحة المحددة بالمنحنى (c) والمستقيمت : $x = \ln 2, x = 1, y = 0$

(5) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases} \text{ حيث } M'(x'; y') \text{ ذات اللاحقة } z'$$

(ا) اكتب z' بدلالة z . ب) برهن بأن التحويل T هو تشابه يطلب إعطاء عناصره المميزة

(6) عين على المجال $[0; +\infty[$ معادلة صورة المنحنى (c) بالتحويل T

مسألة 4

I. لتكن الدالة العددية g ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ: $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g . (2) استنتج إشارة $g(x)$

(3) نعتبر المتتالية (u_n) والمعرفة بـ: $\int_n^{n+1} g(x) dx$.

أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

II. نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ: $f(x) = \ln \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right|$

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) بين أن: $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) - x = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$

وأن: $\forall x \in]-\infty; 0[: f(x) - \frac{x}{2} = \ln \left(1 - e^{-\frac{x}{2}} \right)$

نرمز بـ (c) لمنحني الدالة f وبـ (Δ) إلى المستقيم المقارب لـ (c) في جوار $(+\infty)$

وبـ (Δ') إلى المستقيم المقارب للمنحني (c) في جوار $(-\infty)$.

3-أ) عين معادلتَي المستقيمين (Δ) و (Δ') . ب) أدرس وضعية (c) بالنسبة إلى كل

من (Δ) و (Δ') . 4) أنشئ (c) في معلم متعامد ومتجانس.

(5) لتكن الدالة g اقتصار الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} يطلب إعطاء جدول تغيراتها وإنشاء منحنيها (Γ)

اختبر معلوماتك

الدوال الناطقة

مسألة 1

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ : $f(x) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+5}$

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f . (2) عين إحداثيتي w نقطة تقاطع المنحني (c) مع محور الفواصل ثم بين أن w هي مركز تناظر للمنحني (c) .

(3-أ) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة w .

(ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) ثم استنتج أن النقطة w هي نقطة

انعطاف المنحني (c) . (4) أرسم المنحني (c) والمماس (Δ) (وحدة الطول $2cm$).

(5) حل بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m المعادلة ذات المجهول x :

$$6mx^2 - 4(m-1)x + 5m - 8 = 0 \quad (6)$$

نعبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x) = \frac{-4|x|+8}{x^2-4|x|+5}$ وليكن (Γ) منحنيها البياني في المعلم السابق .

(أ) بين أن g هي دالة زوجية . (ب) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إنشاء (Γ) .

مسألة 2

ليكن كثير الحدود $p(x)$ حيث : $p(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

(1) أدرس إشارة $p(x)$.

(2) f دالة عددية معرفة بـ : $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$. نسمي (c) الممثل

البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (أ) عين مجموعة تعريف الدالة f .

(ب) أحسب $f'(x)$ ثم تحقق أن $f'(x) = \frac{p(x)}{(x-2)^2}$ واستنتج تغيرات الدالة f .

(ج) بين أن المنحني (c) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيينه .
 (د) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) .

(د) أكتب معادلة المماس للمنحني (c) عند النقطة ذات الفاصلة 3 .

(3) أرسم المنحني (c) في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$.

مسألة 3

f دالة عددية ذات المتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

نرمز بـ (c) إلى الممثل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

1- (أ) عين مجموعة تعريف الدالة f . (ب) بين أن من اجل كل $x \in D_f$:

$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\delta}{x+1}$ حيث α, β, δ أعداد حقيقية يطاب تعيينها .

2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم

مقارب مائل للمنحني (c) . (ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) أنشئ المنحني (c) والمستقيم (Δ) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^3 - mx^2 = m$. 6- (أ) عين على المجال $[0; 1[$ دالة أصلية للدالة f .

(ب) أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) ، والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلاتهما $x = \lambda$ ، $x = 0$ حيث $0 < \lambda < 1$.

(ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 1} S(\lambda)$

الدوال الجذرية

مسألة 1

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـ: $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{|x+1|}$ وليكن

(c) منحنيا البياني في معلم متعامد و متجانس . 1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة

المطلقة ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. 2) أدرس قابلية الاشتقاق عند النقطة $x = 0$ وفسر

هندسيا النتيجة . 3) أحسب $f'(x)$ في المجالات التي تقبل فيها الدالة f الاشتقاق

وحدد إشارة $f'(x)$ ثم أعطي جدول تغيرات الدالة f

(4) بين أن المنحني (c) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0 \in]0; 1[$

(5) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (6) أنشئ المنحني (c)

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 4|}$ وليكن (c) المثل البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $(0; \bar{i}; \bar{j})$.

(1-أ) أدرس استمرارية واشتقاق الدالة f على \mathbb{R}

(ب) أحسب $f'(x)$ في كل مجال أين تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق.

(2-أ) برهن أن $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$ من أجل كل $x \in]-\infty; -1/2[$

وأن $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x > 0$ من أجل كل $x \in]-1/2; -1/2\sqrt{5}[$

(ب) استنتج إشارة $f'(x)$. (3-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) أعطي جدول تغيرات الدالة f .

(4-أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$ واستنتج أن المنحني (c)

يقبل مستقيمين مقاربين معادلاتهما $y = -x$ و $y = 3x$.

(ب) أنشئ المنحني (c) . (5) نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 4}$

نسمي (Γ) المنحني البياني لها في المعلم السابق. (أ) عين مجموعة تعريف الدالة g

(ب) برهن بأن الدالة g زوجية. (ج) باستعمال المنحني (c) أشرح كيف يمكن إنشاء

المنحني (Γ) .

مسألة 3

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ وليكن (γ) المنحني الممثل

للدالة f في معلم متعامد ومتجانس. (1) أدرس تغيرات الدالة f

(2-أ) عين معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $(0; f(0))$.

(ب) حدد نقاط تقاطع (γ) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

(3) أنشئ (γ) والمستقيم (Δ) .

الدوال اللوغارتمية

مسألة 1

- I. لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = x^2 - 1 + 2 \ln x$.
 1) أدرس تغيرات الدالة g .
 2) برهن بأن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد $x_0 = 1$.
 3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

- 1) برهن بأن على المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة .
 2) أدرس تغيرات الدالة f . نرسم (c) و (Γ) للمنحنيين الممثلين للدالتين f و $\ln x \rightarrow x$ في معلم متعامد ومتجانس $(\bar{j}; \bar{i}; 0)$ (طول الوحدة $4cm$) .
 3- أ) أدرس وضعية (c) بالنسبة إلى (Γ) . ب) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .
 4) أنشئ المنحني (c) والمنحني (Γ) .

5- أ) h دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

- أحسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية على المجال $]0; +\infty[$ للدالة : $x \rightarrow \frac{\ln x}{x^2}$.
 ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بمجموعة النقاط $M(x; y)$ حيث :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ f(x) \leq y \leq \ln x \end{cases}$$

مسألة 2

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{2x + 1 - \ln|x+1|}{x+1}$ وليكن (c) المنحني البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $(\bar{j}; \bar{i}; 0)$. 1- أ) تحقق أن من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن :

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $f(x) = 2 - \frac{1 + \ln|x+1|}{x+1}$

ج) أحسب $f(-3)$ ، $f(-2)$ ، $f(0)$.

- (2) أدرس تغيرات الدالة f . (3-أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .
 (ب) عين إحداثيتي نقطة تقاطع (c) مع المستقيم المقارب الأفقي .
 (ج) برهن بأن المنحني (c) يقطع (x', x) في نقطة وحيدة $x_0 \in]-2; -1[$.
 (4) أنشئ المنحني (c) .

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$\ln|x+1| + 2(m-1)(x+1) + 1 = 0$$

(6) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x - y + 2 \end{cases} \quad M'(x'; y') \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ حيث :}$$

- (أ) اكتب z' بدلالة z . (ب) استنتج طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .
 (ج) اكتب معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل S .

مسألة 3

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x$.

نسمي (c) المنحني البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(1. (o; \bar{i}; \bar{j})$ أدرس

تغيرات الدالة f . (2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .

(3-أ) أثبت أن المنحني (c) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها .

(ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (c) عند النقطة A .

(4-أ) عين إحداثيتي نقطة تقاطع للمنحني (c) مع حامل محور الفواصل .

(ب) أرسم المنحني (c) والمستقي (Δ) .

II. لتكن الدالة g المعرفة بـ :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{4}x^2 \ln x^2 - \frac{3}{4}x^2, & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

نرمز بـ (Γ) للمنحني البياني للدالة g .

(1-أ) ادرس استمرارية الدالة g عند النقطة $x = 0$.

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$ هل الدالة g قابلة الاشتقاق عند النقطة $x = 0$ ؟

(2) استنتج دون دراسة الدالة g رسم المنحني (Γ) .

(3) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$x^2 \ln x^2 - 3x^2 = m \quad (4-أ) \text{ باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب } \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

(ب) أحسب المساحة S للحيز المستوي المحدد بالمنحني (Γ) ومحور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x = 1$ و $x = e$

مسألة 4

(1) نعتبر الدالة f العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln|x+1| \quad (أ) \text{ حدد } D_f \text{ مجموعة تعريف الدالة } f.$$

(ب) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها .

(ج) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) ليكن (c) منحنى الدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \bar{i}; \bar{j})$.

(أ) بين أن للمنحني (c) نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها .

(ب) أكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها (-2) وعند النقطة ω .

(ج) أدرس الفروع اللانهائية وعين المستقيمت المقاربة للمنحني (c) .

(د) أنشئ المنحني (c) . (3-أ) استنتج مما سبق إشارة $f(x)$ على D_f .

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (c) والمستقيمت التي معادلاتها :

$$x = \lambda, \quad x = -2, \quad y = 0 \text{ حيث } \lambda < -2$$

(4) نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|}, \quad x \neq -1$$
$$g(-1) = 0$$

ليكن (γ) منحنى الدالة g في معلم جديد متعامد

ومتجانس $(o'; \bar{i}'; \bar{j}')$. (أ) بين أن لكل $x \neq (-1)$ لدينا : $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$

(ب) أدرس استمرارية وقابلية الاشتقاق عند القيمة $x = (-1)$

(ج) أدرس تغيرات الدالة g (يمكنك استعمال السؤال 3)

(د) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (γ) . (هـ) أرسم المنحني (γ) .

مسألة 5

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = x + \frac{2}{x} - 3 - \ln x$

ليكن (c) منحنى الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس تغيرات الدالة f والفروع اللانهائية للمنحنى (c) .

(2- أ) أكتب معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $(+1)$.

(ب) بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في المجال $]2\sqrt{3}; 4[$.

(ج) استنتج حل للمعادلة : $x + \frac{2}{x} - \ln x \geq \frac{9}{2} - 2 \ln 2$

(3) أرسم المنحنى (c) والمماس (Δ) .

(4- أ) أحسب الدالة المشتقة للدالة g حيث : $g(x) = -x + x \ln x$ من أجل $x > 0$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

(ج) λ عدد حقيقي حيث : $0 < \lambda < 1$. المساحة المحدودة بالمنحنى (c)

وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x = \lambda$ و $x = 2$.

(د) أحسب $S(\lambda)$ بدلالة λ ثم $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S(\lambda)$.

مسألة 6

I. لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{e}{x(\ln x - 1)^2}$ وليكن (c) المنحنى

البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) للدالة f .

(3) اكتب معادلة المماس للمنحنى (c) عند النقطة $x_0 = 1$. (4) أنشئ المنحنى (c) .

(5- أ) عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; e[$. (ب) استنتج حساب $S(\lambda)$ مساحة

الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c) والمستقيمتين التي معادلاتها:

$y = 0$, $x = 1$, $x = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$) . (ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S(\lambda)$

(د) عين قيمة λ حتى تكون $S(\lambda) = \frac{e}{3}$.

II. ليكن h التحاكي الذي مركزه o (مبدأ المعلم) ونسبته $\frac{1}{e}$ والذي يرفق بكل نقطة

$M(x; y)$ من المستوي النقطة $M'(x'; y')$ ولتكن z و z' لاحقتي كل من M و M' .

(1) أكتب z' بدلالة z ثم استنتج x', y' بدلالة x, y .

(2) أثبت أن معادلة (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل h هي: $y = \frac{1}{e} \times \frac{1}{x \ln^2 x}$

مسألة 7

$$\begin{cases} f_1(x) = (1-x) \ln^2(1-x), & x \leq 0 \\ f_2(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

لتكن الدالة f المعرفة كما يلي:

نرمز بـ (c) لمنحني الدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(o; \bar{i}; \bar{j})$.

1- (أ) بين أن الدالة f مستمرة عند النقطة $x = 0$. (ب) هل الدالة f قابلة للاشتقاق

عند $x = 0$ ؟ 2- (أ) أدرس على المجال $]0; +\infty[$ تغيرات الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + 2 \ln \frac{x+1}{x} \quad \text{(ب) استنتج إشارة } g(x) \text{ على المجال }]0; +\infty[.$$

3- (أ) أدرس تغيرات الدالة f (ملاحظة: $f_2'(x) = x \times g(x)$)

(ب) أحسب $f(2), f(1), f(-e+1)$. 4- (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأعطي تفسير

هندسيا للنتيجة. (ب) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f_2(x) - x + \frac{1}{2} \right] = 0$ ثم استنتج معادلة

المستقيم المقارب للمنحني (c) في جوار $(+\infty)$

5) أنشئ المنحني (c) .

6) باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب: $\int_1^e x^2 \ln(x+1) dx$, $\int_1^e x^2 \ln x dx$

(ب) استنتج حساب المساحة الحيز المستوي المحصورة بين المنحني (c) والمستقيمت

التي معادلاتها: $y = 0$, $x = 1$, $x = e$

مسألة 8

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = (x+1) \ln \frac{1}{|x+1|} + (x+2)$ وليكن

(c) المنحني البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o; \bar{i}; \bar{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

(1) أدرس تغيرات الدالة f

(2) أحسب $f(-2)$ ، ثم برهن على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]2; 3[$ حيث $f(\alpha) = 0$

(3) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) للدالة f .

(4) أنشئ المنحني (c).

(5) برهن بأن المنحني (c) له في نقطتين مماسين موازيين للمستقيم (D) ذي المعادلة

$$x + y - 1 = 0 \quad . \quad 6- \text{ أ) عين دالة أصلية للدالة } x \rightarrow (x+1) \ln(x+1)$$

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي الممثل لمجموعة النقاط $M(x; y)$ حيث :

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{و} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

II. نعتبر التحويل T_α الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ من المستوي النقطة

$$\begin{cases} x' = \alpha x - 1 \\ y' = (2\alpha + 1)y + 1 \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{حيث : } M'(x'; y')$$

(أ) عين مجموعة قيم α من أجلها يكون T_α تقابلا.

(ب) برهن أن التحويل T_{-1} ($\alpha = -1$) هو تناظر مركزي يطلب تعيين مركزه

(ج) أوجد معادلة المنحني (Γ) صورة المنحني (c) بالتحويل T_{-1}

مسألة 9

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = x^2 - \ln x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g وتحقق أن : $g(x) \geq 1$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

(2) لتكن الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x والمعرفة بـ :

$$f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

ومتجانس. برهن أن من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

- (3) أدرس تغيرات الدالة f . 4- (أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) .
 (ب) أدرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .
 (5) (D) هو المماس للمنحني (c) عند النقطة التي فاصلتها x_0 .
 إذا كان ميل (D) هو (-1) أكتب عندئذ معادلة المستقيم (D) .
 (6) بين أن (c) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .
 (7) أرسم المماس (D) والمنحني (c) . (8) ناقش بيانيا وحسب الوسيط الحقيقي m وجود
 وعدد نقاط تقاطع (c) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة : $y = -x + m$
 (9) أحسب مساحة الحيز المستوي المحددة بالمنحني (c) والمستقيمتين التي معادلاتها :

$$y = -x + 1, \quad x = \frac{1}{e}, \quad x = 1$$

مسألة 10

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة بـ : $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g . (2) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II. نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ وليكن (c) المنحني البياني لها

في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $f'(x)$ وبرهن أن إشارتها هي إشارة $g(x)$. (2) ادرس تغيرات الدالة f

3- (أ) برهن أن $f(x) > 0$ من أجل كل $x \in [1; +\infty[$.

(ب) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]1/2; 1[$

(ج) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (4) أنشئ المنحني (c) .

5- (أ) باستعمال الكاملة بالتجزئة احسب : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

(ب) احسب المساحة المحصورة بين المنحني (c) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلاتهما : $x = 1$ و $x = e$.

III. نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة $M'(x'; y')$

ذات اللاحقة z' حيث : $z' = -z + 1 + 2i$. (1) ما طبيعة التحويل T وما هي عناصره

المميزة . عين معادلة صورة المنحني (c) بالتحويل T .

مسألة 11

I. g دالة عددية معرفة بـ : $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. 1- أدرس تغيرات الدالة g

(ب) برهن على وجود عدد حقيقي $\alpha \in]1; e[$ حيث $g(\alpha) = 0$.

(ج) تحقق أن $1,7 < \alpha < 1,8$.

(2) برهن أن $\alpha \ln \alpha = 1$ وأعطي إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \ln x + x - x \ln x$.

1- أ) تحقق أن $f(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} + 1 - \ln x \right)$ واستنتج حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) أحسب $f'(x)$ وبرهن أن $f'(x) = -g(x)$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

(2) أدرس تغيرات الدالة f . 3- أ) برهن أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \alpha - 1$

(ب) أعطي قيمة تقريبية لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha = 1,7$.

(3) أنشئ المنحني (c) في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$) .

4- أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : $\int_1^e \ln x dx$, $\int_1^e x \ln x dx$

(ب) استنتج حساب $\int_1^e f(x) dx$. (ج) أعطي تفسيراً هندسياً لـ $\int_1^e f(x) dx$.

مسألة 12

I. لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \ln x$. 1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أحسب $f(1)$ وأدرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

(3) نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = |x-1| \ln x$.

(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب) أدرس اشتقاق الدالة g عند النقطة $x_0 = 1$.

(ج) أحسب $g'(x)$ وأدرس إشارتها على كل من المجالين : $]1; +\infty[$, $]0; 1[$.

(د) أعطي جدول تغيرات الدالة g . 4) أنشئ المنحني (c) الممثل البياني للدالة g

في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$) .

5) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيم (D_m) الذي يمر بالنقطة $A(0;1)$ ومعامل توجيهه m . (أ) أعطي معادلة (D_m) . (ب) عين حسب قيم m عدد نقاط (c) و (D_m) . (أ-6) باستعمال الكاملة بالتجزئة عين على المجال $[1; +\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow |x-1| \ln x$.

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي لمجموعة النقط $M(x; y)$ حيث $\begin{cases} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

II. نعتبر المعادلة التفاضلية $y' = 2y$. (1) عين الحل العام لهذه المعادلة .

(2) عين الحل الخاص الذي يحقق $y' \left(\frac{1}{2} \right) = 2e$

مسألة 13

لتكن الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ وليكن (c) المنحني

البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (أ-1) تحقق أن من أجل $x \in D_f$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(-x^2+2)}{x(x+2)} \quad \text{(ب) أدرس تغيرات الدالة } f \text{ .}$$

(2-أ) أثبت أن المنحني (Γ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$ هو منحني مقارب

للمنحني (c) . (ب) أدرس وضعية المنحنيين (c) و (Γ) .

(ج) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (c) . (د) أثبت أن المنحني (c) يقطع محور

الفواصل في ثلاثة نقاط . (3) أنشئ المنحني (c) .

(4) λ عدد حقيقي حيث $0 < \lambda < 1$. (أ) أحسب المساحة $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي

المحدد بالمنحنيين (c) و (Γ) والمستقيمين اللذين معادلاتهما : $x = \lambda$ و $x = 1$.

(ب) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S(\lambda)$. (5) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z

النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = -z - 2$.

(أ) عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة .

(ب) جد معادلة المنحني (c') صورة المنحني (c) بالتحويل S .

مسألة 14

g دالة عددية معرفة بـ : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$. نعتبر الدالة f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

(1-2) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (ب) أدرس تغيرات الدالة f .

(3-أ) برهن بأن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = \frac{x}{2}$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (c) .

(ب) أدرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة إلى (D) على المجال $]0; +\infty[$.

(ج) برهن بأن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد $\alpha \in]0,34; 0,35[$.

(4) انشئ المنحنى (c) . (5) أحسب المساحة المحددة بالمنحنى (c) والمستقيمتين التي

$$y = \frac{x}{2}, x = 1, x = e$$

(6) نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases} \quad M'(x'; y') \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ حيث :}$$

(أ) أكتب z' بدلالة z . (ب) اكتب معادلة المنحنى (Γ) صورة المنحنى (c) بالتحويل S .

مسألة 15

$$I. \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة بـ : } g(x) = -\frac{1}{x+2} + \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right|$$

(1) أدرس تغيرات الدالة g . (2) أثبت ان للمعادلة $g(x) = 0$ حل وحيد α حيث :

$$(-1,21) < \alpha < (-1,22)$$

$$II. \text{ لتكن الدالة } f \text{ المعرفة كم يلي : } f(x) = (x+1) \times \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right|$$

البياني في مستو منسوب إلى معلم و متعامد و متجانس .

(1) أدرس تغيرات الدالة f . (2-أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (c) .

(ب) أكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (c) عند النقطة التي ترتيبها معدومة .

ج) أثبت ان المنحني (c) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ عند نقطة وحيدة فاصلتها

د) أثبت أن $f(\alpha) = 1 - \frac{1}{2+\alpha}$ ثم عين حصر $f(\alpha)$. $\beta \in]-1,79; -1,78[$

3) حل بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

4- أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث : $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$

ج) أحسب المساحة S للحيز المستوي المحدود بالمنحني (c) والمستقيمات التي

معادلاتها : $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$

الدوال الأسية

مسألة 1 :

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$

1) أ- احسب $g'(x)$ وأدرس إشارتها. ب- برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ لما $x \rightarrow +\infty$

ج - أعط جدول تغيرات الدالة g و احسب $g(0)$.

د- برهن أن لكل x من المجال $[0; +\infty[$ تكون $g(x) \leq 0$.

(II) ليكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = xe^{-x} - x + 4$ و ليكن

(C) منحنيا البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(طول الوحدة $2cm$)

1) أ- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[0; +\infty[$ تكون $f'(x) = g(x)$.

ب- أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

2) أ- برهن بأن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 4$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C)

ب - أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج - أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 0$.

3) أنشئ المنحني (C) .

4-أ (D) مستقيم معادلته : $y = -\frac{x}{2} + 4$ ، أنشئ (D) .

ب - عين نقاط التقاطع للمنحني (C) مع (D) .

ج - أدرس على المجال $[0; +\infty[$ إشارة $f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 4\right)$ و استنتج وضعية

(C) بالنسبة إلى (D) .

5) لتكن الدالة $h(x)$ المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $h(x) = (-x-1)e^{-x}$

أ- احسب $h'(x)$.

ب - استنتج على المجال $[0; +\infty[$ دالة أصلية للدالة : $x \mapsto xe^{-x} - \frac{x}{2}$.

ج - احسب بـ : cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحني (C) و المستقيم

(D) و المستقيمين الذين معادلتهما $x = 0$ و $x = \ln 2$.

مسألة 2 :

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = 2e^{1-\frac{x}{2}} - e^{-x}$ و ليكن

(C) المنحني البياني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

. $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ- تحقق أن $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(2e - e^{-\frac{x}{2}} \right)$. ب- أدرس تغيرات الدالة f .

2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .

3) أ- أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- احسب $f(-3)$ و عين إحداثيتي نقطة تقاطع (C) مع (xx') .

4) ارسم المنحني (C) .

5) λ عدد حقيقي أكبر من (-2) . أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد

بالمنحني (C) و المستقيمت التي معادلاتها $x = -2$ و $x = \lambda$ و $y = 0$.

ب- عين قيمة λ التي من أجلها $S(\lambda) = 2e + 1$.

جـ احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow +\infty$.

(6) لتكن الدالة العددية h المعرفة كما يلي: $h(x) = 2e^{\frac{1+|x|}{2}} - e^{|x|}$

أ - بين أن الدالة h هي دالة زوجية. ب - باستخدام المنحني (C) ارسم المنحني (Γ) الممثل للدال h .

(II) نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة $N(x; y)$ ذات اللاحقة z النقطة

$N'(x'; y')$ ذات اللاحقة z' حيث $z' = -iz + 1 - i$.

(1) ما طبيعة التحويل T ؟ حدد عناصره المميزة.

(2) أكتب العبارة التحليلية للتحويل T . (3) عين معادلة صورة المنحني (C) بالتحويل T .

مسألة 3 :

(I) لتكن الدالة العددية المعرفة بـ: $f(x) = \frac{2e^{2x} - e^e}{e^{2x} - e^x + 1}$ وليكن (C) منحنيا

البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

(1) أدرس تغيرات الدالة f . (2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C).

(3) بين أن $h(1; 0)$ هي مركز تناظر المنحني (C).

(4) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة h .

(5) أ- عين إحداثيتي النقطة A نقطة تقاطع (C) مع محور الفواصل.

ب - عين فاصلة B النقطة من (C) ذات الترتيبة 2.

(6) ارسم (Δ) و (C) ثم عين حسب قيم x ، إشارة $f(x)$.

(II) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = -1 + \ln(e^{2x} + e^x + 1)$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني.

(1) عين مجموعة تعريف الدالة g .

(2) بين أن لكل x من D_g : $g'(x) = f(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغيرات الدالة g .

(3) برهن أن لكل x من D_g : $g(x) = 2x - 1 + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ ، ثم استنتج

أن (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (D) معادلته $y = 2x - 1$ في جوار $(+\infty)$.

(4) احسب $g(0)$ و $g(1)$ ، ثم ارسم (D) و (Γ).

(5) احسب بالسنتيمتر المربع المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمت التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = -\ln 2$ ، $x = \lambda$. حيث $\lambda < -\ln 2$.
 - احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow -\infty$.

مسألة 4 :

(I) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = 1 - (1+x)e^{-\frac{1}{2}x}$ و ليكن (C) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) أ- أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$ و فسر هندسيا النتيجة .

ب- احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

(3) عين f الدالة الأصلية للدالة g على \mathbb{R} و التي تأخذ القيمة 6 من أجل $x = 0$.

(II) نعتبر الدالة العددية f والمعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $f(x) = x + 2(x+3)e^{-\frac{1}{2}x}$ و ليكن (C') منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) ادرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C') .

ب - أثبت أن المنحني (C') يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها و كتابة معادلة المماس للمنحني (C') عندها .

ج - أثبت أن المنحني (C') يقطع (xx') في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث :
 $\beta \in]-3; -2[$.

د- اثبت أن $f(\alpha) = \alpha + 2 + \frac{4}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) أنشئ المنحني (C') (4) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما . احسب $S(\lambda)$ مساحة

الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C') و المستقيم المقارب المائل (Δ) للمنحني (C')

و المستقيمين $x = 0$ و $x = \lambda$ ، ثم احسب $\lim S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow +\infty$.

مسألة 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = \frac{3e^{-x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2}$ وليكن (C) منحنىها

البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$).

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

(3) أنشئ المنحنى (C) .

(4) أ- تحقق أن: لكل عدد حقيقي x فإن $f(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} + \frac{2e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2}$

ب- ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما. احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد

بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها $x = \lambda$ ، $x = 0$ ، $y = 1$.

ج- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow +\infty$.

(5) نعتبر التناظر المركزي S الذي مركزه النقطة $\omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

أ- أوجد العبارة المركبة و العبارة التحليلية للتحويل S .

ب- أثبت أن صورة المنحنى (C) بالتحويل S هم المنحنى (Γ) الممثل للدالة g

المعرفة بـ: $g(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^2}$

مسألة 6 :

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ ($x \neq 0$) و $f(0) = 0$

ليكن (C) منحنىها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- أدرس استمرارية الدالة f . ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين

و على يسار $x = 0$.

(20) أدرس تغيرات الدالة f .

(3) أ- برهن أن $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 1$. ب- استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة

$y = 2x + 1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

ج- أكتب معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{2}$.

(4) أنشئ المنحني (C).

(5) أ- عين العدد الحقيقي α بحيث تكون الدالة g المعرفة على \mathbb{R}_+^* بـ:

$$g(x) = \alpha x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

دالة أصلية للدالة f .

ب- احسب بـ: cm^2 المساحة المحددة بالمنحني (C) والمستقيمتين $y = 0$

$$\text{و } x = \frac{1}{2} \text{ و } x = 2.$$

$$\begin{cases} h(x) = e^{\frac{1}{x} + \ln|2x+1|} & \text{لما } x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

(II) دالة عددية معرفة بـ:

(1) أكتب $h(x)$ بدلالة $g(x)$. (2) استنتج إنشاء المنحني (C') للدالة h .

مسألة 7 :

$$(I) \text{ لتكن الدالة } g \text{ المعرفة بـ: } g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(2) أ- برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 1 + x] = 0$ ماذا تستنتج؟

ب- برهن أن g هي تقابل للمجال $+\infty$; $-\infty$ على المجال 0 ; $-\infty$.

(3) أنشئ المنحني (C) للدالة g .

$$(II) \text{ نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بـ: } f(x) = e^{-x} \times \ln(1+e^x)$$

(1) أ- أدرس اشتقاق الدالة f على \mathbb{R} .

ب- برهن أن لكل عدد x من \mathbb{R} فإن $f'(x) = e^{-x} \times g(x)$.

ج- احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ (لحساب النهايات ضع $z = e^x$)

د- أدرس تغيرات الدالة f . (2) أنشئ المنحني (Γ) للدالة f .

(3) نضع $S(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx$. أ- تحقق من وجود $S(\lambda)$.

ب- باستعمال التكامل بالتجزئة ، احسب $S(\lambda)$ (ملاحظة : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$)

ج- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow +\infty$.

(III) نعتبر المعادلة التفاضلية: $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ (1)

(1) تحقق بأن f هي حل للمعادلة (1) .

(2) نضع $y = f - k$ حيث k دالة عددية للمتغير x ، برهن أنه إذا كان f حل للمعادلة

(1) فإن الدالة k تكون حلا للمعادلة (2) $k' + k = 0$

(3) حل المعادلة (1) و استنتج حلا للمعادلة (2) .

مسألة 8 :

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x - 1 + e^x & : x \in]-\infty ; 0] \\ f_2(x) = x^2 \times \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & : x \in]0 ; +\infty[\end{cases}$$

(1) أ- احسب $f(0)$ و برهن أن f مستمرة عند النقطة $x = 0$.

ب- هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$ ؟

(2) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + 2 \ln \frac{x+1}{x}$$

أ- أدرس تغيرات الدالة g . ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0 ; +\infty[$.

(3) أ- برهن أن $f_2'(x) = x \times g(x)$. ب- أدرس تغيرات الدالة f .

(4) أ- برهن أن في جوار $(-\infty)$ المنحني (C) للدالة f يقبل مستقيما مقاربا (D) ذو

المعادلة $y = -x - 1$. ب- برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x + \frac{1}{2} \right] = 0$

ج - استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) في جوار $(+\infty)$ يطلب إعطاء معادلته .

(5) أنشئ المنحني (C) في معلم متعامد ومتجانس .

(6) λ عدد حقيقي سالب . أ- احسب المساحة $S(\lambda)$ المحددة بالمنحني (C) و

المستقيمات $y = -x - 1$ و $x = \lambda$ و $x = 0$.

ب- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$ لما $\lambda \rightarrow -\infty$.

مسألة 9 :

(I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = x - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ و ليكن (C) منحنيها

البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (طول الوحدة $2cm$)

(1) أ- عين مجموعة تعريف الدالة f . ب- برهن أن الدالة f غردية.

ج - احسب $f\left(\frac{1}{2} \ln 2\right)$. د - أدرس تغيرات الدالة f .

(2) أ- برهن أن المستقيمين (D) و (D') اللذين معادلتاهما $y = x - 1$ و $y = x + 1$

مقاربان للمنحني (C) .

(3) أنشئ المنحني (C) .

(II) لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

(1) أ- عين مجموعة تعريف الدالة g . ب- احسب $g'(x)$.

(2) λ عدد حقيقي حيث $\lambda \geq 1$. احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي لمجموعة

النقط $N(x; y)$ من المستوي حيث: $\begin{cases} 1 \leq x \leq \lambda \\ x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$

(3) ليكن (D_m) المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي

عدد نقاط التقاطع مع المستقيم (D_m) .

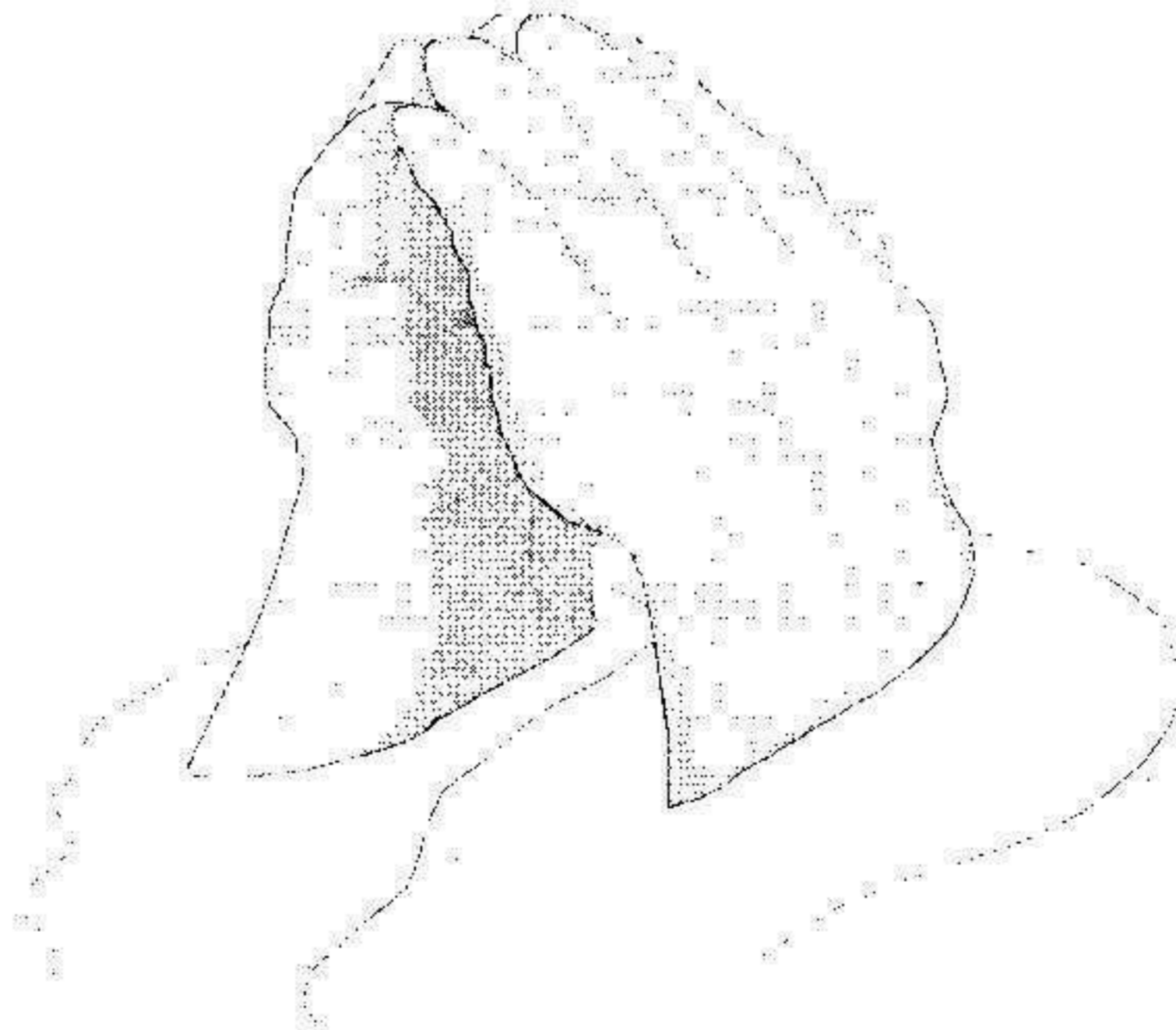
مسألة 10 :

- (I) لتكن الدالة العددية f المعرفة بـ: $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$ وليكن (C) منحنيا البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة f .
 - (2) أدرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) .
 - (3) بين أن (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.
 - (4) أ- عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.
ب- أرسم هذا المماس و المنحني (C) .

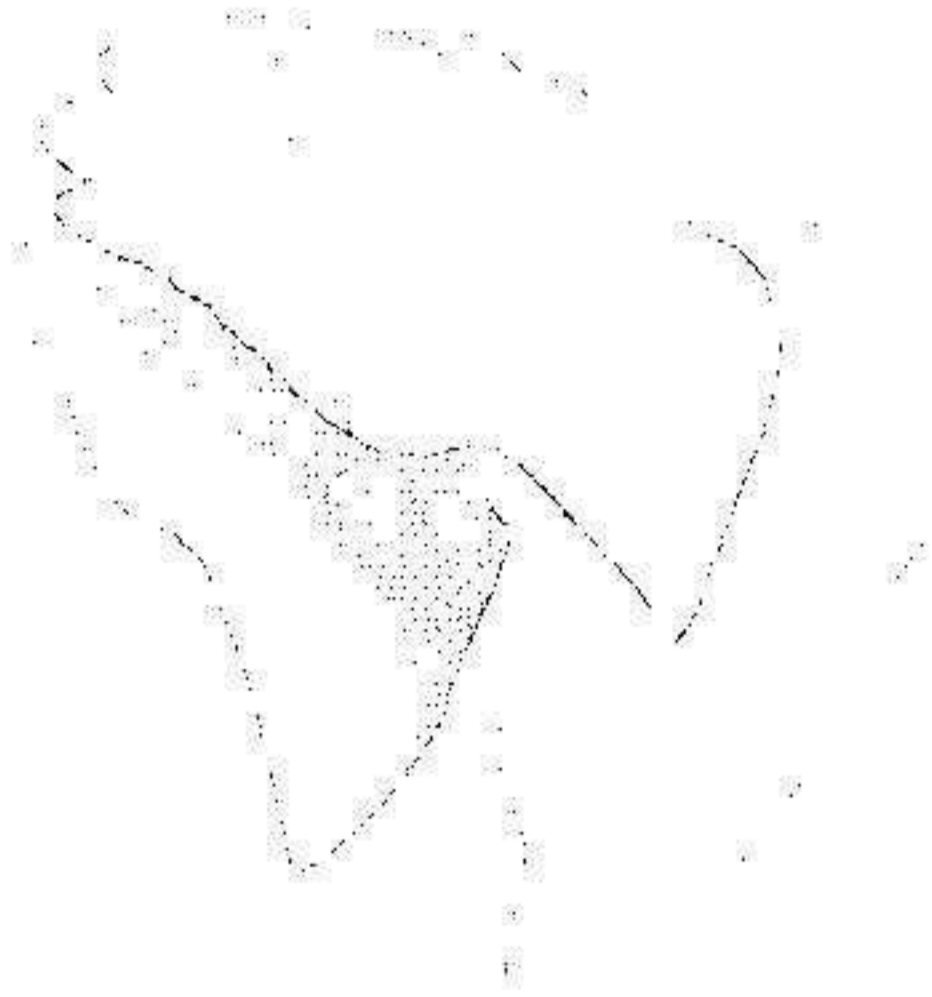
(II) لتكن الدالة l المعرفة بـ: $l(x) = (2x^2 + ax + b)e^x$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

- (1) أوجد الشرط الذي يحققه a و b حتى تقبل الدالة l قيمة حدية كبرى و قيمة حدية صغرى.
- (2) أ- عين العددين a و b حتى تكون الدالة l أصلية للدالة f على المجال $[1; +\infty[$.
ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمت التي معادلاتها:

$$x = \frac{3}{2}, \quad x = 1, \quad y = 0$$



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَيَسِّرْ لِي أَمْرِي وَاجْعَلْ مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي



بِالتوفيق إن شاء الله في البكالوريا - محمد صابور

محتويات الكتاب

- 5.....المحور الأول: الدوال العددية (الملخص)
- 14.....المحور الثاني: الدوال الناطقة
- 40.....المحور الثالث: الدوال الجذرية
- 60.....المحور الرابع: الدوال المثلثية
- 68.....المحور الخامس: الدوال الأسية
- 120.....المحور السادس: الدوال اللوغاريتمية
- 192.....المحور السابع: الدوال المركبة
- 222.....المحور الثامن: أختبر معلوماتك
- 146.....الفهرس



العالم نور واجهل ظلام

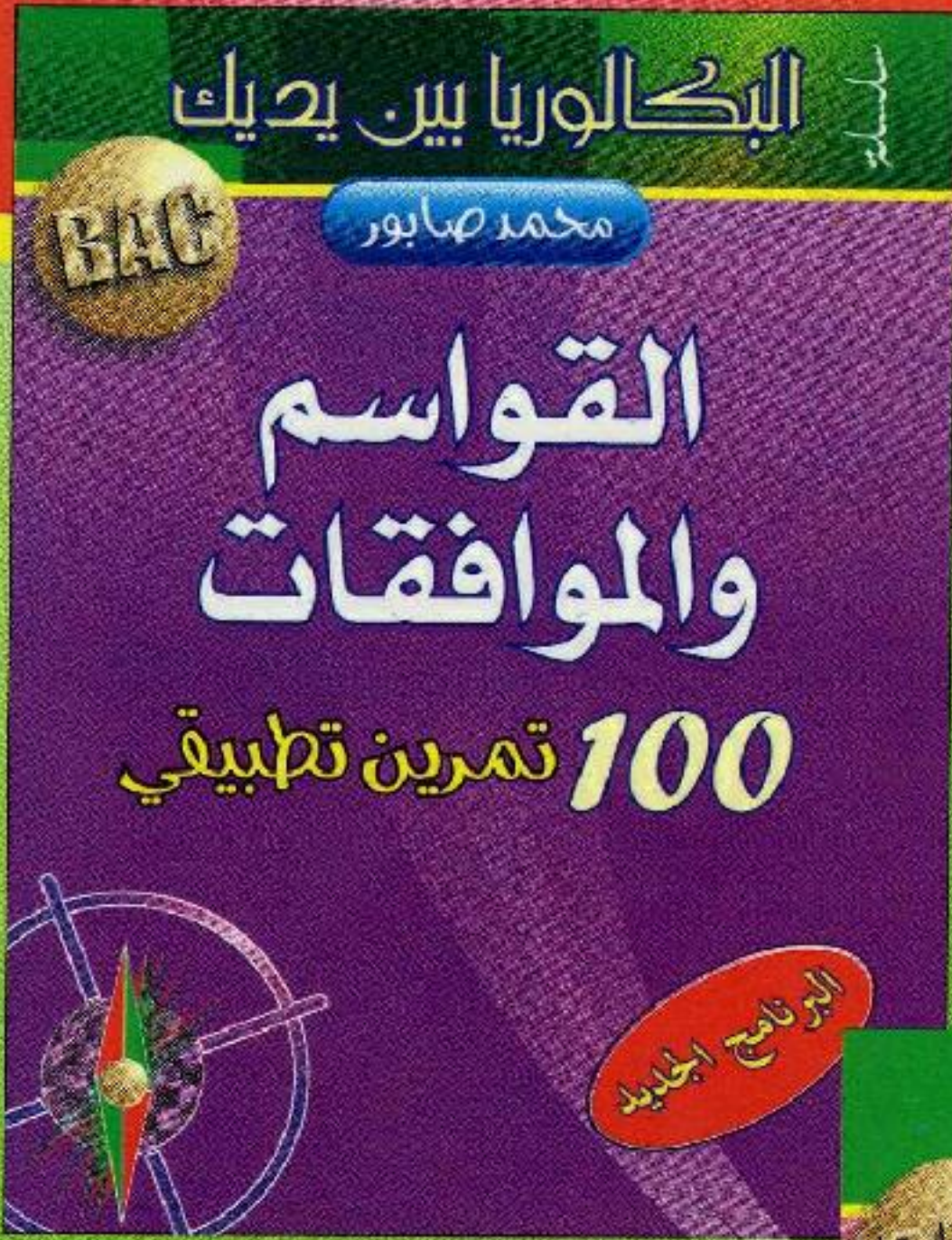
Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

24/04/2015

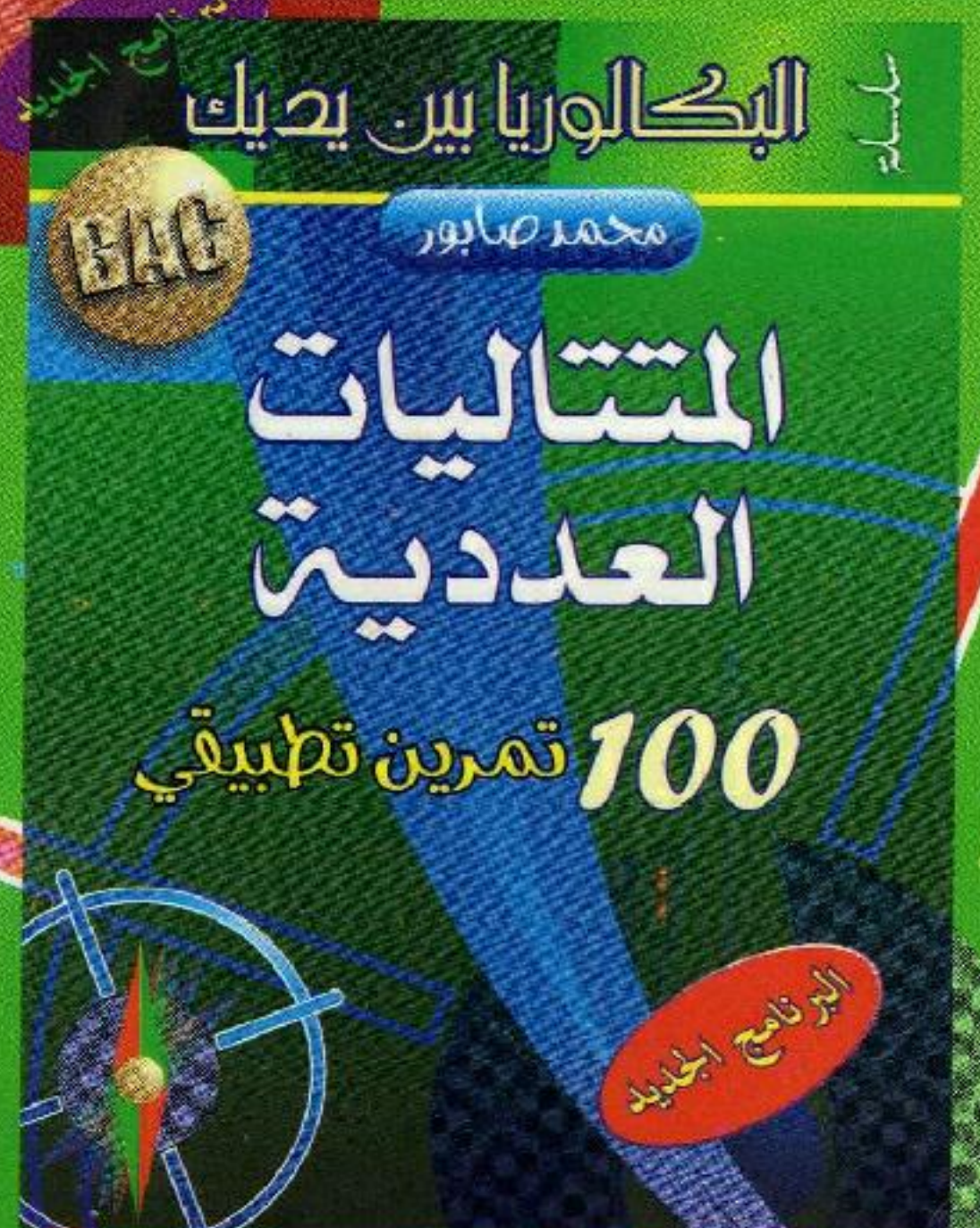
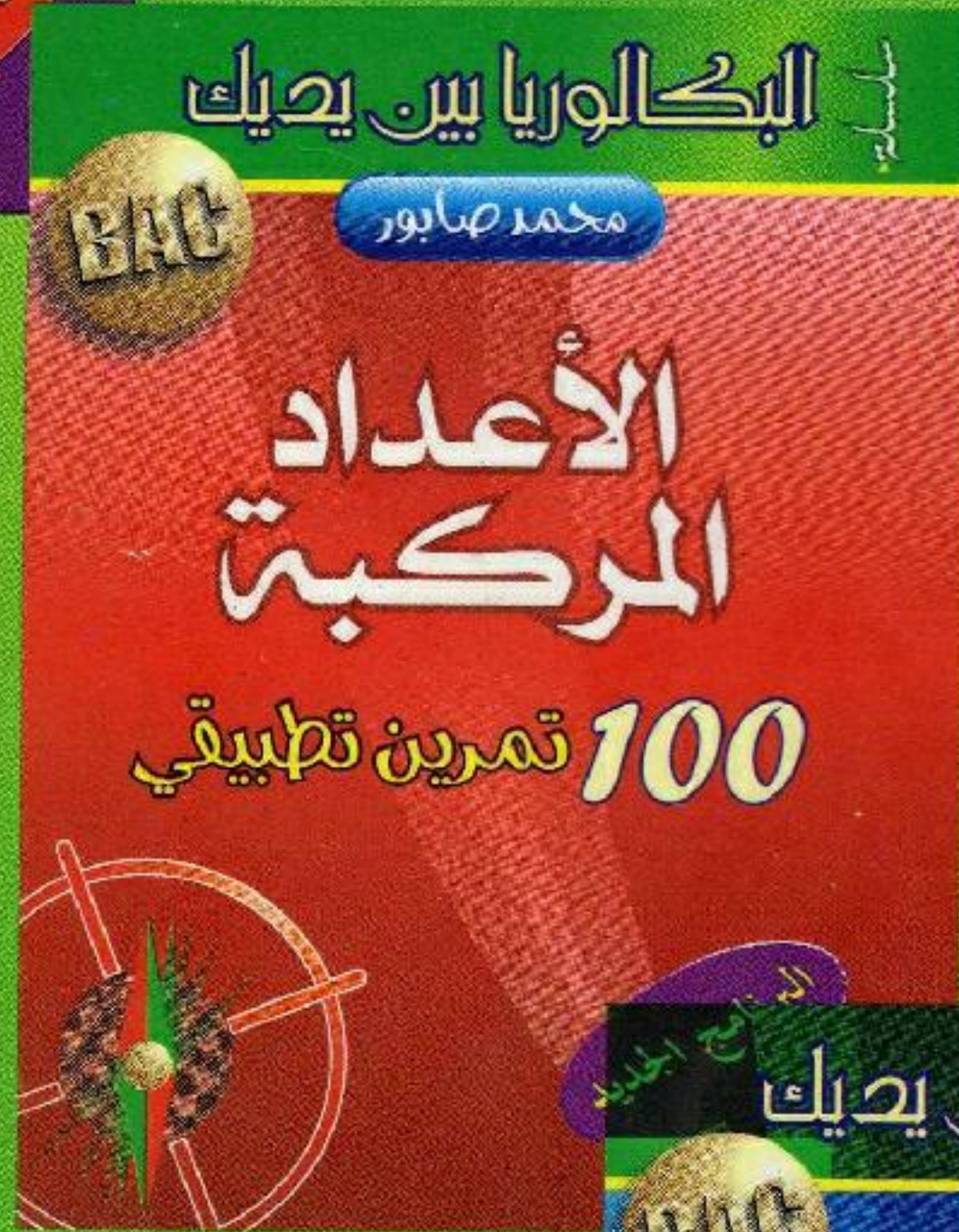
مكتبة
الشيخ
سيدنا الشيخ
الشيخ



في نفس السلسلة



Scanned by:
Mekkaoui Ayoub



ISBN : 978-9947-0-1946-7

Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr